

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 3 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540098

研究課題名(和文) 最小跡の新たな研究方向と関連する諸問題

研究課題名(英文) New directions of research of cut locus and related topics

研究代表者

伊藤 仁一 (Itoh, Jin-ichi)

熊本大学・教育学部・教授

研究者番号：20193493

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：最小跡に関する総合的な研究として、5つのテーマに分けてバランスよく進展させた。(A) Jacobi の最終定理の拡張に関してはその特異点を決定した。(B) 最小跡の構造をグラフ理論的に調べる一連の研究ではその主論文を完成させた。(C) 曲面のすべての点がどこかの点からの距離関数の臨界点となることを最小跡の性質を用いて示した論文を公表できた。(D) 凸多面体が平らに折り畳めることをその最小跡を用いて示した。(E) 最小跡がフラクタル集合となるフィンスラー計量を構成した。この中で、多面体の折り畳み方に最小跡の構造を応用することなどは新たな研究方向と思われる。

研究成果の概要(英文)：This research was separated 5 themes and got progress all themes as the synthetic research. (A) As an extension to general dimension of Jacobi's last statement we could determine the type of its singularities. (B) A main paper of series of studies of the structure of cut locus by using graph theory was accepted. (C) The sensational paper was published which proved by using cut locus that every point on surface is a critical point of distance function from some point. (D) By using cut locus we showed any convex polyhedron is continuously flattened. (E) We construct Finslerian metric with fractal cut locus. In these studies it seems the flattening of polyhedral with cut locus structure is a remarkable new direction of research.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：測地線 最小跡 共役跡 多面体

1. 研究開始当初の背景

最小跡の研究は、H. Poincaré による曲面の位相との関連から始まり、その後の長く研究され続けてきた。最近、最小跡までの距離関数の Lipschitz 性を示し、Ambrose の問題が曲面で肯定的に解決し、楕円面の一般の点の最小跡の決定し、Jacobi の定理(共役跡の尖点は4つ)に完全な証明を与え一般次元への拡張を試み始めた。

2. 研究の目的

本研究は、以下に述べるように着実に進展してきている最小跡に関連する研究を、この機会に新しい方向も含め更なる発展を目指すものである。

次の5つのテーマ (A) Jacobi の最終定理の一般化と二次曲面的な現象、(B) 最小跡の構造と性質の研究(グラフとの関連、第2最小跡)、(C) 最小跡に関連する諸問題(最遠点集合、擬測地線、距離関数の臨界点等)の研究、(D) 最小跡を応用する問題(PL 多様体の最小跡、多面体を平らに折り畳む問題、多面体の unfolding 等)、(E) 関連する他の計量における最小跡の考察、に分け、(A)と(C)は益々の発展を、(B)と(D)は特に新たな研究方向が含まれており、これらをバランスよく発展させることを目的とする。

3. 研究の方法

(1) 現段階である程度得られている多くの結果を、まず論文にまとめ発表する。

(2) 各テーマごとに次のように計画した。

(A) Jacobi の定理の一般化の特異点を具体的に決定する。系による二次曲面を構成する論文の執筆を進める。(B) 曲面の最小跡のグラフ理論的な構造について論文にまとめ発表する。(C) 距離関数の臨界点を最小跡との関連で調べる。(D) 多面体を平らに折り畳むことや多面体の展開に最小跡を用いて考察する。(F) フィンスラー計量の最小跡等について考察する。

(3) 本研究は多くの共同研究から成り立っており、共同研究者と直接会っての詳細な議論が必要不可欠であり、また多くの他分野との関連も深く、それらの研究者の研究協力や専門知識の供与を必要であり、そのための出張を計画している。

4. 研究成果

(1) 研究期間内に 24 編の学術論文が発表及び受理された。当初の予定よりおくれてまだ論文の形にまとまっていないものもあるが、3年間の数学の論文数としては十分な成果と言える。また、海外で 17 回、国内で 28 回の研究発表を行った。そのうち招待講演は 7 回である。

(2) 各テーマごとには次のような結果が得られた。

(A) に関しては、二次曲面を含むある種の

Liouville 曲面に関して最小跡を決定する論文を発表した。また、Jacobi の定理の一般化に関してその特異点を決定し論文の執筆を進めた。更に、系による二次曲面を構成する論文を投稿した(清原との共同研究)。

(B) に関しては、曲面の最小跡のグラフ理論的な構造についての一連の4つの論文のうち一つが発表され、メインとなる論文が受理された。他の2つは公表に向けて修正中である(Vilcu との共同研究)。第2最小跡に関しては研究を始めるための準備を行った。

(C) に関しては、曲面においてすべての点がどこかの点からの距離関数の臨界点となることを示した論文 Every point is critical を公表した(Barany, Vilcu, Zamfirescu と共同研究)。また、以前投稿していた凸曲面において四角形の比較定理を使い最遠点集合の位置と擬閉測地線との関連の論文を発表した(Ieiri, Vilcu との共同研究)。空間開曲線の全曲率が最小となる曲線が折れ線からなることを示した論文を発表した(榎本との共同研究)。

(D) に関しては、正多面体を連続的に平らに折り畳むことができることを示した論文を発表した(奈良との共同研究)。更に、凸多面体を連続的に平らに折りたたむことをその最小跡を用いて行う論文を発表した(奈良, Vilcu との共同研究)。また、多面体の unfolding の refold に関する新たな研究を MIT のグループとはじめ、正十二面体といくつかの準正多面体が edge unfolding に関して refold が rigid であることを示し、J. O'Rourke が国際研究集会で発表した。

(E) に関しては、フィンスラー計量でも最小跡がフラクタル集合となる計量の構成に関して進展が得られた(Sabau との共同研究)。

(3) 新たな研究方向といえるのは、(B)の最小跡とグラフ理論との関連や、第2最小跡の研究の準備等と、(D)の凸多面体を最小跡を用いて平らに折り畳むことができたことや、最小跡での展開等や PL 多様体に関する研究尾準備である。特に任意の凸多面体の平らな折り畳みに最小跡が偶然に非常にうまく役立ったことは特筆すべき結果と思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 24 件)

J. Itoh, C. Vilcu, Every graph is a cut locus, J. Math. Soc. Japan, 査読有, (to appear) 受理済。

K. Enomoto, J. Itoh, The total absolute

torsion of open curve in  $E^3$ , Illinois J. Math., 査読有, (to appear) 受理済 .

J. Itoh, C. Nara, Transformability and reversibility of unfoldings of doubly-covered polyhedral, Proc. JCDCG, 査読有, (to appear) 受理済 .

N. Dolbilin, J. Itoh, C. Nara, Affine classes of 3-dimensional parallelhedra -their parametrization, LNCS 8296, 査読有, (to appear) 受理済 .

I. Barany, J. Itoh, C. Vilcu, T. Zamfirescu, Every point is critical, Advances in Math., 査読有, 235 (2013), 390-397

K. Enomoto, J. Itoh, The total absolute curvature of open curves  $E^n$ , Proceedings of the workshop on Differential Geometry of Submanifolds and its related topics, 査読有, (2013), 190-204

E. Demaine, M. Demaine, J. Itoh, A. Lubiw, C. Nara, J. O'Rourke, Refold rigidity of convex polyhedra, Computational Geometry Theory and Applications, 査読有, 46 (2013), 979-989

J. Itoh, C. Nara, Continuous Flattening of a Regular Tetrahedron with Explicit Mappings, Modelling Analysis of Information Sciences, 査読有, 19 (2012), 127-136

J. Itoh & C. Vilcu, Cut locus structures on graphs, Discrete Math., 査読有, 312 (2012), 524-531

J. Itoh, C. Nara & C. Vilcu, Continuous Flattening of Convex Polyhedra, Proc. of XIV Spanish Meeting on Computational Geometry, 査読有, LNCS 7579 (2012), 85-97

J. Itoh & C. Nara, Continuous flattening of platonic polyhedral, Lecture note in computer science, 査読有, 7033 (2011), 108-121

K. Kiyohara, Singular semi-classical

approximation on Liouville surfaces, Differential Geom. Appl., 査読有, 29 (2011), s125-s134

J. Itoh, K. Kiyohara, Cut loci and conjugate loci on Liouville surfaces, manuscript math., 査読有, 136 (2011), 115-141

J. Itoh, T. Zamfirescu, Moderation of convex bodies, J. Convex Anal., 査読有, 18 (2011), 865-872

K. Ieiri, J. Itoh & C. Vilcu, Quasigeodesics and farthest points on convex surfaces, Advances in Geom., 査読有, 18 (2011), 571-584

[学会発表](計 45件)

伊藤仁二, Cut locus structure, 日本数学会年会, 2014年3月16日, 学習院大学

C. Nara, Continuous flattening of truncated tetrahedral, Mexican conf. on discrete mathematics and computational geometry, 2013年11月14日, Oaxaca(Mexico)

伊藤仁二, Cut locus, distance function and transformer, Geometry and something, 2013年11月3日, 福岡大学

伊藤仁二, Every graph is cut locus, 日本数学会秋季総合分科会, 2013年9月26日, 愛媛大学

C. Nara, Remarks on reversibility of unfolding of doubly-covered polyhedral, 2013年9月18日, JCDCGG 2013, 東京理科大

C. Nara, Transversality and reversability of unfolding of doubly-covered polyhedral, Conf. on Discrete Mathematics, 2013年9月11日, Bucharest (Romania)

J. Itoh, Fractal cut locus, Conf. on Discrete Math.:Discrete Geometry and Alexandrov surfaces, 2013年9月8日, Bucharest(Romania)

J. Itoh, Cut locus and its application, Geometry seminar at Universidad Autonoma de Madrid, 2013年9月4日, Madrid(Spain)

奈良知恵, 3次元凸平行多面体のアフィ

ン同値類 - 媒介変数表示 -, 日本数学会  
年会, 2013年3月21日, 京都大学

伊藤仁一, Refold rigidity と 空間曲線の  
全掠率, 直観幾何学, 2013年02月11日,  
熊本大学

清原一吉, 楕円体の共役跡の特異点につ  
いて, 測地線及び関連する諸問題,  
2013年1月14日, 熊本大学

Jin-ichi Itoh, Continuous flattening of  
polyhedra -from Platonic to  
Archimedean solids-, Tailand-Japan  
joint conf. on computational geometry  
and graphs, 2012年12月7日,  
Bangkok(Thailand)

伊藤仁一, 凸多面体の展開の再折り凸多  
面体, 部分多様体論・湯沢2012(招待講  
演), 2012年11月23日, 湯沢グランド  
ホテル(新潟県)

榎本一之, 曲線の全曲率, 日本数学会秋  
季総合分科会, 2012年09月18日, 九州  
大学

Chie Nara, Continuous flattening of  
Archimedean polyhedron, The fourth  
geometry meeting dedicated to the  
centenary of A.D.Alexandrov, 2012年  
08月22日, St.Petersburg(Russia)

Jin-ichi Itoh, Closed geodesics on the  
regular dodecahedron, Discrete and  
Computational Geometry, 2012年08  
月15日, Yaloslavl(Russia)

伊藤仁一, リーマン多様体の最小跡と凸  
多面体の平面折り畳み, 談話会(北海道  
大学数学教室)(招待講演), 2012年07  
月26日, 北海道大学

Jin-ichi Itoh, Closed geodesics on the  
regular dodecahedron, Int. Conf.  
Mathematics of distances and  
applications, 2012年7月5日,  
Varna(Bulgaria)

伊藤仁一, Continuous flattening of

convex polyhedral, 日本数学会年会,  
2012年3月29日, 東京(東京理科大学  
神楽坂)

J. O'Rourke, Refold rigidity of convex  
polyhedral, EuroCG 2012(招待講演),  
2012年3月21日, Assisi (Italy)

⑳ J. Itoh, Cut locus and several topics  
of Intuitive Geometry, Seminar on  
computational geometry (SUNY), 2012  
年3月20日, Long Island (USA)

㉑ J. Itoh, Cut loci on ellipsoids and  
continuous flattening of polyhedral,  
Geometry seminar (Univ. Pennsylvania),  
2012年3月14日, Philadelphia (USA)

㉒ J. Itoh, Cut loci of Riemannian  
manifolds and related topics,  
Geometry seminar (CUNY), 2012年3月  
13日, New York (USA)

㉓ J. Itoh, Moderation of convex bodies,  
JCDCG 2011, 2011年11月28日, 東京(東  
海大学代々木)

㉔ J. Itoh, Continuous flattening of  
platonic polyhedra and its  
applications, Convexity, Topology,  
Combinatorics and Beyond, 2011年10  
月3日, Puerto Vallarta (Mexico)

[図書](計 0 件)

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

伊藤 仁一 (ITOH JIN-ICHI)  
熊本大学・教育学部・教授  
研究者番号: 20193493

### (2) 研究分担者

清原 一吉 (KIYOHARA KAZUYOSHI)  
岡山大学・理学部・教授  
研究者番号: 80153245