

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 12 日現在

機関番号：26402

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540102

研究課題名(和文) 曲面の写像類群における線型性の視覚化の育成

研究課題名(英文) Fostorage of the visualization of the linearity for mapping class groups of surfaces

研究代表者

笠原 泰 (Kasahara, Yasushi)

高知工科大学・工学部・准教授

研究者番号：80299370

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：研究代表者の発見した、曲面の写像類群における「線型性の視覚化」の観点から生じる問題を研究し、写像類群の線型性が自然に解決するような理論的枠組の構築を目指した。その結果、「線型性の視覚化」それ自体の改良、曲面群の複素線型表現の変形空間における写像類群の作用の大域的不動点の存在に対する新しい制限、未解明な内、最も低い次元である、種数 g の写像類群の $2g+1$ 次元線形表現の分類に向けて、いわゆるEarle類と関連する新しい制限を得た。

研究成果の概要(英文)：We studied problems which arise from the viewpoint of the visualization of the linearity of mapping class groups of surfaces, which we established previously, towards building the theoretical setup for deciding their linearity. Consequently, we improved our visualization itself, obtained a new restriction for the global fixed points of the action of mapping class group on the deformation space of complex linear representations of surface group of low dimensions, and obtained a new restriction related with so-called the Earle class towards the classification of $2g+1$ dimensional linear representation for the case of genus g surfaces.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：曲面の写像類群 線形表現 変形空間 曲線複体

1. 研究開始当初の背景

コンパクトで向き付け可能な曲面(2次元多様体)に対し、向きを保つ微分同相写像の isotopy 類全体の成す群を、その曲面の写像類群という。また、そのような曲面に穴(puncture)を許すことで、同様にして穴開き曲面の写像類群が定義され、この中には Artin の組みひも群が含まれる。以下、これらを単に写像類群という。写像類群は低次元トポロジーの他、代数幾何、数論、数理論理などとも関連を持ち、現在までに様々な観点から活発に研究されており、特に最近では、その安定コホモロジー群が決定されるなど、目覚ましい成果が得られている。しかし、古くからある基本的な問題である線形性、すなわち忠実な有限次元線型表現の存在問題、については、Brendle-Hamidi-Tehrani による肯定的な証拠があるものの、Artin の組みひも群など、曲面の型が非常に単純な場合を除き、未解決のまま残っている。写像類群の線型性問題は、例えば、類似の群である自由群の自己同型群についての Formanek-Procesi による否定的結果と、前述の Brendle-Hamidi-Tehrani による証拠を対比すればわかる通り、非常に微妙な問題である。また、最近の Kida による著しい結果も、写像類群が位相群の格子となることを禁止しながらも、線型性を決定するには到っていない。

このような状況の中で研究代表者は、種数 2 の Jones 表現という岩堀-Hecke 環を用いて定義される具体的な線型表現の、摂動展開を用いた一連の研究を通じて、一般種数のコンパクト曲面の写像類群が線型となるために必要十分な幾何的条件を発見し、これを「線型性の視覚化」と名付けた。

2. 研究の目的

本研究は、この「線型性の視覚化」の観点から生じる問題を研究することにより、写像類群の線型性が自然に解決するような理論的枠組の構築を目指すものである。そのために以下の研究を行う。

- (1) 「線型性の視覚化」そのものの理解を深める。
- (2) すでに知られている線型表現の性質を、「線型性の視覚化」の観点から研究する。
- (3) 「線型性の視覚化」を直接用いて、写像類群の線型性の解決を試みることで、考えるべき問題を具体的に明らかにする。
- (4) 写像類群の線形表現一般を、位相幾何学的観点から検討し、「線型性の視覚化」を深める。

3. 研究の方法

- (1) 境界付コンパクト有向曲面の場合に、写像類群の曲線グラフへの作用と「線型性の視覚化」との関連を詳細に検討した。
- (2) 最近、他の研究者らにより得られた、写像類群の低い次数の低い線型表現に関する結果を、「線型性の視覚化」の観点から検討した。
- (3) すでに知られている線型表現の性質を、研究代表者の観点、すなわち「線型性の視覚化」の観点から研究した。
- (4) 研究費により購入したコンピュータ、数式処理ソフトを活用し、手計算では不可能な、膨大な量の計算機実験を行い、具体的な線型表現の性質についての見通しを探った。
- (5) 関連の期待される位相幾何学の理論を検討した。また、国内外で開催される研究集会に適宜参加し、知見の交換を行った。

4. 研究成果

コンパクト有向曲面の写像類群の「線型性の視覚化」と関連する位相幾何学について研究を行い、以下の成果を得た。

(1) これまで、曲面の写像類群の線型性を完全に記述することができるのは 1 点穴開き曲面の場合のみであった「線型性の視覚化」を改良し、境界付きコンパクト有向曲面の場合にも、考え得る最良の形、すなわち、中心を除いた(up to center による)写像類群の線型性を完全に判定することのできる形にできた。

(2) 種数 g の有向曲面の写像類群に対し、 $2g-1$ 以下の次元をもつ線形表現は、本質的には自明なものに限るという Franks-Handel による最近の結果、および、 $2g$ 次元の非自明な線形表現は古典的シンプレクティック表現と共役になるという Korkmaz による最近の結果、さらには次元が $3g-3$ 以下の線形表現は常に非自明な核(kernel)を持つという同じ Korkmaz による結果を、「線型性の視覚化」の観点と比較検討し、種数 g の閉曲面に対する曲面群の複素線形表現の変形空間への、種数 g の閉曲面の写像類群による作用は、表現の次元が $3g-3$ 以下の場合には、忠実表現で代表される大域的不動点を持たないことを示した。

(3) 種数 g の有向曲面の写像類群の線形表現のうち、未解明な中で最も次元の低い、 $2g+1$ 次元の線形表現の共役類の分類に向けて、いわゆる Earle 類と関連する新しい制限を得た。

(4) 曲線複体の頂点の生成するベクトル空間のある有限次元商として定義される写像類群の或る具体的な線形表現について、核(kernel)の(非)自明性を決定するためのあるアプローチの示唆を得た。

(5) 「線型性の視覚化」に基づいた線型性問題の考察に具体例を与えるため、単純閉曲線を基底とするベクトル空間の有限次元商についての一般的考察を開始した。特に、そのような空間に、複雑さを表す「次数」を導入し、それが小さい場合の構造を決定した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 2 件)

Yasushi Kasahara, “On visualization of the linearity problem of mapping class groups of surfaces”, *Geometriae Dedicata*, 印刷中, 査読あり, DOI 10.1007/s10711-014-9968-0.

Yasushi Kasahara, “The Birman exact sequence and a visualization of the linearity for mapping class group”, 数理解析研究所講究録 1777, (2012), pp. 57-58, 査読なし.

〔学会発表〕(計 4 件)

笠原 泰, “Invariants of representations of the Kauffman skein algebra and the quantum Teichmueller space”, 研究集会「曲面の写像類群に関連する幾何と代数」, 2013年12月21日, 強羅静雲荘.

Yasushi Kasahara, “On visualization of the linearity problem for mapping class groups of surfaces II”, 2013年2月18日, Special Program on Teichmueller Theory, Erwin Schroedinger Institute, Vienna, Austria.

Yasushi Kasahara, “On visualization of the linearity problem for mapping class groups of surfaces I”, 2013年2月18日, Special Program on Teichmueller Theory, Erwin Schroedinger Institute, Vienna, Austria.

“The Birman exact sequence and the linearity of mapping class group of surface”, *Geometric and analytic approaches to representations of a group and representation spaces*, 京都大学数理解析研究所, 2011年6月22日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

笠原 泰 (KASAHARA YASUSHI)
高知工科大学・工学部・准教授
研究者番号：80299370

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし