

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 23 日現在

機関番号：32617

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540105

研究課題名(和文) 結び目の位置と曲面

研究課題名(英文) Positions and surfaces of a knot

研究代表者

小沢 誠 (Ozawa, Makoto)

駒澤大学・総合教育研究部・准教授

研究者番号：50308160

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,600,000円、(間接経費) 780,000円

研究成果の概要(和文)：(1) 高尾和人氏との共同研究において、橋数が4である極小な橋位置を持つ3橋結び目の存在を示した。

(2) 石井敦氏、岸本健吾氏との共同研究において、境界既約な外部を持つハンドル体結び目は、イソトピー及びアニュラス移動を法として、局所的な1ハンドルを分解する2分解球面が一意的に存在することを示した。Mario Eudave-Munoz氏との共同研究において、トンネル数1の種数2ハンドル体結び目の特徴付けを与えた。古宇田悠哉氏との共同研究において、種数2ハンドル体結び目外部の本質的ディスク・アニュラス・トーラスの分類を与えた。

(3) 一様に捻じれた結び目がNeuwirth予想を満たすことを得た。

研究成果の概要(英文)：(1) In a joint work with Kazuto Takao, we showed that there exists a 3-bridge knot with 4-bridge destabilized bridge position.

(2) In a joint work with Atsushi Ishii and Kengo Kishimoto, for a handlebody-knot whose exterior is boundary-irreducible, there exists a unique set of 2-decomposing spheres which decompose local 1-handles up to isotopy and annulus-moves. In a joint work with Mario Eudave-Munoz, we characterized tunnel number 1 genus 2 handlebody-knots. In a joint work with Yuya Koda, we gave a classification of essential disks, annuli and tori in the exterior of a genus 2 handlebody-knot.

(3) We showed that uniformly twisted knots satisfy the Neuwirth conjecture.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・位相幾何

キーワード：結び目 ハンドル体 橋分解 トンネル数 本質的曲面 Neuwirth予想

1. 研究開始当初の背景

(1) 結び目の橋位置は、1954年に H. Schubert によって導入されて以来、結び目理論において、基本的な表示方法として利用・研究されてきた。これまでに知られている極小な橋位置は、自明な結び目 (J.-P. Otal)・2橋結び目 (J.-P. Otal)・トーラス結び目 (M. Ozawa) に関するもので、全て最小なものしかなかった。そこで、極小な橋位置で最小でないものが存在するかという問題が生じる。

(2) ハンドル体の3次元球面への埋め込みをイソトピーの同値類で考えたものをハンドル体結び目という。ハンドル体結び目についてはカンドル等の代数的不変量を用いた研究はあるが、3次元多様体論の立場からの研究はあまり見られない。そこで、ハンドル体結び目の分解について、幾何的なアプローチを行うことが考えられる。

(3) 任意の非自明な結び目に対して、それを非分離的に含み結び目外部において本質的であるような閉曲面が存在するという Neuwirth 予想は、1964年に提起されて以来、50年経った今でも未解決のままである。そこで、Neuwirth 予想の解決に向けて、当初の予想の発端と思われるトーラス結び目を基盤とする研究が考えられる。

2. 研究の目的

(1) 研究開始当初まで、極小な橋位置で最小橋数でないものは存在が知られていなかった。そこで、このような結び目の橋位置の構成と証明を目的とした。

(2) ハンドル体結び目の2分解の存在と一意性を証明すること、及び、具体的なハンドル体結び目の非同値性を示すことを研究の目的とした。また、トンネル数1の種数2ハンドル体結び目について、2分解の特徴付けを目的とした。更に、種数2ハンドル体結び目外部において、本質的ディスク・アニユラス・トーラスの特徴付けをし、ハンドル体結び目が双曲的であるかどうかの判定を与えることを目的とした。

(3) Neuwirth 予想の解決へ向けて、トーラス結び目の拡張として全ての結び目を捉えることを目的とした。

3. 研究の方法

(1) もし、橋表示が well-mixed 条件を満たせば、その橋位置の Hempel 距離は1より大きいという高尾和人氏の結果がある。また、Hempel 距離が1より大きい橋位置は極小であることが分かる。従って、最小橋数でない橋位置に対応する橋表示が well-mixed 条件を満たせば、研究の目的が果たせることになる。

(2) ハンドル体結び目について、 n 枚の本質的ディスクで交わり、ハンドル体結び目外部において圧縮不可能かつ境界非平行な球面を n 分解球面と定義する。3次元多様体論で用いられる切り貼り論法により、2分解球面

の一意性を示す。また、トンネル数1の種数2ハンドル体結び目の2分解球面については、ハンドル体結び目外部の種数3Heegaard分解との交わりを考察することにより、特徴付けを行う。更に、種数2ハンドル体結び目外部の本質的ディスク・アニユラス・トーラスについては、特にアニユラスの場合に、アニユラスの近傍を結び目の近傍と見做すことにより、Cabling 予想に関する結果を応用する。

(3) 閉偽曲面で縦横分解を持つものに対し、+平滑化を行うことで、縦曲面・横曲面及び絡み目を得る。閉偽曲面が本質的であるという定義から、縦曲面・横曲面が本質的であることを導く。

4. 研究成果

(1) 高尾和人氏との共同研究において、橋数が4である極小な橋位置を持つ3橋結び目の存在を示した。

(2) 石井敦氏、岸本健吾氏との共同研究において、境界既約なハンドル体結び目は、イソトピー及びアニユラス移動を法として、局所的な1ハンドルを分解する2分解球面が一意的に存在することを示した。また、その応用として、 6_{14} と 6_{15} が同値でないことを示した。更に、 6_{14} と 6_{15} の外部が同相でないことも示した。Mario Eudave-Munoz 氏との共同研究において、トンネル数1の種数2ハンドル体結び目の特徴付けを与えた。古宇田悠哉氏との共同研究において、種数2ハンドル体結び目外部の本質的ディスク・アニユラス・トーラスの分類を与えた。また、上記2分解球面の一意性において、境界既約という仮定を取り除いた。

(3) 縦横分解を持つ本質的閉偽曲面から、+平滑化を行うことで、本質的縦曲面・横曲面及び非分離的かつ素な絡み目が得られることを示した。系として、一様に扱じれた結び目が Neuwirth 予想を満たすことを得た。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 9件)

M. Eudave-Munoz、M. Ozawa、Composite tunnel number one genus two handlebody-knots, Bol. Soc. Mat. Mexicana、査読有、掲載予定、<http://arxiv.org/abs/1305.3410>

A. Ishii、K. Kishimoto、M. Ozawa、Knotted handle decomposing spheres for handlebody-knots, J. Math. Soc. Japan、査読有、掲載予定、<http://arxiv.org/abs/1211.4458>

Y. Koda、M. Ozawa、Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors, Trans. Amer.

Math. Soc., 査読有、掲載予定、
<http://arxiv.org/abs/1212.5928>
M. Ozawa, K. Takao, A locally minimal, but not globally minimal bridge position of a knot, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 査読有, Vol. 155, no. 1, 2013, 181-190, <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004113000182>
M. Ozawa, J. H. Rubinstein, On the Neuwirth conjecture for knots, Communications in Analysis and Geometry, 査読有, Vol. 20, no. 5, 2012, 1019-1060, <http://dx.doi.org/10.4310/CAG.2012.v20.n5.a5>
M. Ozawa, Bridge position and the representativity of spatial graphs, Topology and its Appl., 査読有, Vol. 159, no. 4, 2012, 936-947, <http://dx.doi.org/10.1016/j.topol.2011.11.026>
M. Ozawa, The representativity of pretzel knots, J. Knot Theory and its Ramifications, 査読有, Vol. 21, no. 2, 2013, 1250016, <http://dx.doi.org/10.1142/S0218216511009716>
M. Ozawa, Essential state surfaces for knots and links, J. Austral. Math. Soc., 査読有, Vol. 91, no. 3, 2011, 391-404, <http://dx.doi.org/10.1017/S1446788712000055>
M. Ozawa, Nonminimal bridge positions of torus knots are stabilized, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 査読有, Vol. 151, no. 2, 2011, 307-317, <http://dx.doi.org/10.1017/S0305004111000235>

[学会発表](計 28 件)

Makoto Ozawa, On the Neuwirth conjecture for knots, (joint work with J. Hyam Rubinstein), 東京女子大学「東京女子大学トポロジーセミナー」, 2011 年 5 月 21 日.
Makoto Ozawa, Bridge presentations of knots, Universidad Nacional Autonoma de Mexico 「El Seminario de Topologia en Dimensiones Bajas」, 2011 年 8 月 19 日.
Makoto Ozawa, Nonminimal bridge positions of torus knots are stabilized, 東京女子大学「結び目の数学 IV」, 2011 年 12 月 26 日.
Makoto Ozawa, A locally minimal, but not globally minimal bridge position of a knot, (joint work with Kazuto Takao), Universidad Nacional Autonoma de

Mexico 「Seminario de Topologia en Dimensiones Bajas」, 2012 年 2 月 17 日.
 Kazuto Takao, Estimation for Hempel distances and a nonminimal unstabilized bridge decomposition of a knot, (partially joint work with Kazuto Takao), 名城大学名駅サテライト「Spring Workshop 2011 on Low-Dimensional Topology and its Ramifications, Joint Workshop 「ハンドル体結び目とその周辺 I V」」2012 年 3 月 2 日.

Makoto Ozawa, Composite handlebody-knots, (joint work with A. Ishii and K. Kishimoto, Mario Eudave-Munoz), 名城大学名駅サテライト「Spring Workshop 2011 on Low-Dimensional Topology and its Ramifications, Joint Workshop 「ハンドル体結び目とその周辺 I V」」2012 年 3 月 3 日.

Makoto Ozawa, On the Neuwirth conjecture for knots, (joint work with J. Hyam Rubinstein), 九州大学西新プラザ「Low dimensional topology and number theory IV」, 2012 年 3 月 12 日.

Makoto Ozawa, Composite handlebody-knots, (joint work with A. Ishii and K. Kishimoto, Mario Eudave-Munoz), 早稲田大学「結び目理論の展望」, 2012 年 3 月 17 日.

Mario Eudave-Munoz, Composite tunnel number one genus two handlebody-knots, (joint work with Mario Eudave-Munoz), Universidad Nacional Autonoma de Mexico 「46th Annual Spring Topology and Dynamics Conference」, 2012 年 3 月 23 日.

Makoto Ozawa, The representativity of knots, 東京理科大学「日本数学会 2012 年度年会」, 2012 年 3 月 26 日.

Makoto Ozawa, Nonminimal bridge positions of torus knots are stabilized, 東京理科大学「日本数学会 2012 年度年会」, 2012 年 3 月 26 日.

Makoto Ozawa, A locally minimal, but not globally minimal bridge position of a knot, (joint work with Kazuto Takao), Jagiellonian University 「Mini-symposium "Knot Theory and its ramifications" at The 6th European Congress of Mathematics」, 2012 年 7 月 5 日.

Kazuto Takao, A locally minimal, but not globally minimal bridge position of a knot, (joint work with Kazuto Takao), 広島大学「Workshop on Topology and Geometry - Heegaard splittings of 3-manifolds II-」, 2012 年 8 月 4 日.

Makoto Ozawa, Composite

- handlebody-knots, (joint work with A. Ishii and K. Kishimoto, Mario Eudave-Munoz), Universita di Pisa 「Seminari di Geometria」, 2012年9月5日.
- Makoto Ozawa, On the Neuwirth conjecture for knots, (joint work with J. Hyam Rubinstein), 山形大学「東北結び目セミナー2012」, 2012年10月13日.
- Kazuto Takao, Estimating Hempel distances and locally minimal bridge decompositions of knots, (joint work with Kazuto Takao), 東京大学玉原国際セミナーハウス「葉層構造と微分同相群2012研究集会」, 2012年11月2日.
- Makoto Ozawa, Coexistence of coiled surfaces and spanning surfaces for knots and links, Centro de Investigación en Matemáticas 「School on Knot Theory and 3-Manifolds」, 2012年12月20日.
- Makoto Ozawa, Coexistence of coiled surfaces and spanning surfaces for knots and links, 早稲田大学「結び目の数学 V」, 2012年12月26日.
- Makoto Ozawa, Coexistence of coiled surfaces and spanning surfaces for knots and links, 京都大学「日本数学会2013年度年会」, 2013年3月20日.
- Kazuto Takao, A destabilized bridge sphere of bridge number arbitrarily higher than the bridge number of the knot, (joint work with Kazuto Takao), 京都大学「日本数学会2013年度年会」, 2013年3月20日.
- 21 Makoto Ozawa, Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors, (joint work with Yuya Koda), Toulouse Mathematics Institute 「Low-dimensional Topology and Geometry in Toulouse」, 2013年6月25日.
- 22 Kazuto Takao, Destabilized bridge spheres of knots, (joint work with Yeonhee Jang, Tsuyoshi Kobayashi, Kazuto Takao), 大阪市立大学「Friday Seminar on Knot Theory」, 2013年7月12日.
- 23 Makoto Ozawa, Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors, (joint work with Yuya Koda), 東京女子大学「International Workshop on Spatial Graphs 2013」, 2013年8月15日.
- 24 Makoto Ozawa, Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors, (joint work with Yuya Koda), 島根大学「International Conference on

Topology and Geometry 2013」, 2013年9月3日.

- 25 Makoto Ozawa, Coiled surfaces for knots and links, (joint work with Koya Shimokawa), 東北大学「東北結び目セミナー2013」, 2013年10月26日.
- 26 Makoto Ozawa, Dehn surgery and Seifert surface system, (joint work with Koya Shimokawa), Universita di Pisa 「Seminari di Geometria」, 2014年2月19日.
- 27 Kazuto Takao, Destabilized bridge spheres of knots, (joint work with Yeonhee Jang, Tsuyoshi Kobayashi, Kazuto Takao), 九州大学「第8回福岡・札幌 幾何学セミナー」, 2014年2月20日.
- 28 Makoto Ozawa, Dehn surgery and Seifert surface system, (joint work with Koya Shimokawa), 学習院大学「日本数学会2014年度年会」, 2014年3月15日.

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
<http://www.komazawa-u.ac.jp/~w3c/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小沢 誠 (OZAWA, Makoto)
駒澤大学・総合教育研究部・准教授
研究者番号：23540105

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3)連携研究者 ()

研究者番号：