様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月　 ６ 日現在

機関番号： ３２６４４
研究種目： 基盤研究(C)（一般）
研究期間： 2011～2015
課題番号： ２３５４０１０７

研究課題名（和文） Ｃｈａｒｔ　を用いた曲面結び目の研究

研究課題名（英文） A research of surface-links by using charts

研究代表者
志摩　亜希子（Shima, Akiko）

東海大学・理学部・教授

研究者番号：５０３１７７６５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：曲面結び目を分類するために、チャートを用いて分類表を作成する事を目的とする。４つの交差を含む4-チャートや 5-チャートの場合、球面を表すチャートであれば、最小チャートでないことを示した。丁度６個の白頂点を含む最小チャートは６種類のチャートを含むことを示した。最小チャートは C 変形で変形して白頂点や交差の一番小さいチャートをいう。更に共役変形と安定化変形を考えて、CS-最小チャートというものを考える。丁度６個の白頂点を含む CS-最小チャートはリボンチャートと2-ツイスト-スパントリフォイルを表すチャートの積であることを示した。これより、白頂点が７個以下のチャートは、ほぼ分類が終わった。

研究成果の概要（英文）：To classify surface-links, we make a table of surface-links by using charts. First we show that there is no minimal 4-chart nor minimal 5-chart which represent a sphere in 4-space. Next we show that any minimal chart with six white vertices contains one of six kinds of charts. Here a minimal chart means that the chart has the minimal number of crossings (or white vertices) among the charts C-move equivalent to the chart.
There are other moves between charts called a conjugation and a stabilization. To consider these moves, we define a CS-minimal chart. We show that any CS-minimal chart with exactly six white vertices is the product of a ribbon chart and a chart representing a 2-twist spun trefoil. To combine other results, we complete a classification of charts with at most seven white vertices module ribbon charts.

研究分野： トポロジー

キーワード： 曲面結び目　チャート　白頂点　交差

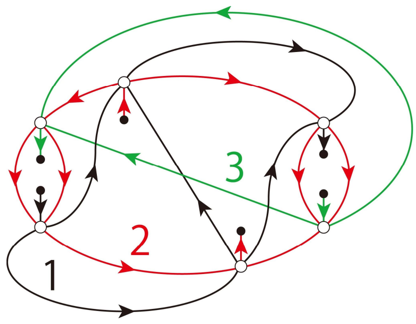
１．研究開始当初の背景

４次元空間内の曲面結び目(埋め込まれた曲面)の研究は、モーション・ピクチャーや曲面絡み目のダイアグラムといった手法を用いて研究する方法がある。最初のモーション・ピクチャーとは、４次元空間内の図形を、時間とともに３次元空間内の図形が変化するものと考えて、４次元空間内の図形を捉える手法である。ダイアグラムとは、４次元空間の図形を p(x,y,z,w)=(x,y,z) という写像で３次元空間内に射影し、その像で４次元空間内の図形を捉える手法である。前者は、多くの３次元空間内の図形が必要で、後者は３次元空間内の立体図形を扱う必要があり、長所もあるが、表示方法に欠点もある。

鎌田氏によって、円板内のラベル付き、向き付きグラフで、４次元空間内の曲面結び目(埋め込まれた曲面)を表示する画期的な方法が開発された。このグラフはチャートと呼ばれている。このチャートを用いて曲面結び目の分類表を作成したいということが、この研究の動機である。３次元空間内の結び目は交差点数に関する分類表があり、結び目理論の発展に大いに役立っている。曲面結び目については、画期的な分類表が無く、曲面結び目についての研究の発展のためにも、分類表の作成は欠くことが出来ないと思われる。

２．研究の目的

本研究はチャートを使って曲面結び目を分類することが目標である。チャートには 3 種類の頂点があり、それぞれ次数が１の頂点(黒頂点)、次数が４の頂点(交差)、次数が６の頂点(白頂点)である。例えば、下図のチャートは丁度６個の白頂点を含むチャートの例である。このチャートは、2-ツイスト-スパン トリフォイルと呼ばれる曲面結び目を表すチャートである。



特に、以下のチャートを調べることが目標である。

（１）４つの交差を含む最小 n-チャート について調べる。

（２）白頂点が４つや６つのチャートの内、リボンチャートでないものを決定する。

（３）白頂点が９個であるチャートについて調べる。

チャートには C 変形と言うチャートの間での変形がある。この変形に対して、それらのチャートに対応する２つの曲面絡み目は同値であることが知られている。従って、チャートを使って、曲面絡み目の研究を行うことが出来る。

３次元空間内の結び目は交差点数の数が最小のものを、順番に調べた分類表がある。ここでの目的は、C 変形で変形して、白頂点が最小なチャートを調べた分類表と、交差が最小なチャートを調べた分類表の両方を作成することを目的とする。特に C 変形で変形して、白頂点が最小なチャートや交差が最小なチャートを最小チャートと呼ぶ。

３．研究の方法

研究目的（２）や（３）については次のように調べる。まず、チャートは型(白頂点の種類)を決める。

すると、ある程度グラフの形が決まってくる。従って、白頂点の数が４や６や９など決まっていると、チャートの型は種類が限られる。それらのチャートの絵を順番に描いていく。その中から、最小チャートの性質を発見していこうと計画していた。

C-I-M4 変形のような大きくチャートを変える変形の開発も行い、一見異なったチャートでも同値なチャートを調べ、チャートの分類に結び付けていく。

研究目的（１）である交差が４つのチャートを調べるために、まずはタングルと呼ばれる円板内のチャートについて調べる。さらに、多くのチャートの例が作られると思うので、それらを分類するため、不変量を計算するソフト開発も行う。そのソフトを使うことにより、チャートを用いた曲面結び目の分類表を作成することを目的とする。

４．研究成果

（１）Γを 4-チャートとする（つまり辺のラベルが１か２か３であるチャートである）。ラベルがmの辺からなる部分グラフ Γ_m と表すことにする。$\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ を交差により分けると、互いに交わらないグラフとなる。これらが木からなるグラフであるとき、Γを線形チャートということにする。チャートは４次元空間内の曲面絡み目を表しているが、その曲面が球面達であるとき、チャートを 2-link チャートという。１番目の結果は『丁度４つの交差を含む 2-link 最小線形 4-チャートは存在しないこと』を示した。この研究で、交差が４個のチャートは交差が３個以下のチャートに比べて数倍複雑でありそうだと分かった。交差が３個のチャートは３種類のチャートを調べればよかったが、交差が４個のチャートは１３種類ほど調べなければならなかった。

（２）（１）の結果を拡張することが出来て、線形であると言う条件が不要であることが分かった。つまり、２番目の結果は『丁度４

つの交差を含む 2-link 最小 4-チャートは存在しないこと』を示した。

2-link 4-チャートは黒頂点が丁度８個あることが知られている。この結果を証明する中で、丁度４つの交差を含む最小 4-チャートで、黒頂点が８個のものが１つ発見された。調べることによって、トーラスと１つの球面からなる曲面絡み目を表すことが分かった。補空間の基本群を調べると、自明な曲面絡み目と同じであると分かったが、実際に自明な曲面絡み目と同値であるかは、今後の課題として残った。

2-link 最小 4-チャートを調べる際に、表示方法を工夫し、８種類ほどのチャートを調べて結論が得られた。この表示方法は、境界が同じ色の辺からなる円板内のチャートと、残りが木のグラフとなるようにチャートを分ける。そうすることによって、１つの絵で、様々なチャートを表し、場合の数が大量になる所を、上手く数を少なくすることに成功し、調べることが可能になった。

（３）つぎの目標としては、交差が４つある 5-チャート(辺のラベルが１か２か３か４であるチャート）を調べることである。4-チャートでは，交差の種類が１種類しかないのに比べて 5-チャートでは種類が３種類と増え、複雑になる。全部で１５種類の chart について考えないといけない。今回分かったことは、その１５種類の内、調べるに必要があるチャートは以下の６種類のものであることが分かった。つまり、『最小 5-チャート Γ で、交差を丁度４個含むならば、必要ならばラベルを入れ替えたりすると、Γ は次の６つのいずれかである。(1) $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_4)=4$, (2) $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_4)=3$, $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_3)=1$, (3) $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_4)=2$, $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_3)=2$, (4) $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_4)=2$, $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_3)=1$, $c(\Gamma_2 \cap \Gamma_4)=1$, (5) $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_3)=4$, (6) $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_3)=2$, $c(\Gamma_2 \cap \Gamma_4)=2$』を示した。ここで、$c(G)$ はグラフ G に含まれる交差の個数とする。交差が４個の 4-チャートは $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_3)=4$ であることを考えると、交差が４個の 5-チャートは 4-チャートよりかなり複雑であることが分かった。

（４）（３）により、交差の種類を調べたことを使って、『丁度４つの交差を含む 2-link 最小 5-チャートは存在しないこと』を示した。この結果は一般の一部のチャートについても成り立つことも分った。Γを n-チャート(辺のラベルが１か２か・・・か n―1 であるチャート）とする。『丁度４つの交差を含む $c(\Gamma_1 \cap \Gamma_{n-1})=4$ であるような 2-link 最小 n-チャートは存在しないこと』を示した。

これを調べるために最小チャートの性質を詳しく調べ、今までの結果を綺麗に整理することも出来た。特に、円板の境界が Γ_m に含まれる３色円板や２色円板が重要な役割を果たしていることが分かった。チャートの辺の向きのある種の一定の法則を持った流れもあることも分った。勝手な向きであると最小チャートにはならなく、川の流れの様に一定の向きが決まっているようであることが分かった。これらの性質により、一般のチャートでも、４-チャートの性質が重要であると分ってきた。

（５）次の結果は、白頂点の数が６個の最小チャートについてである。丁度６個の白頂点を含むチャートの例として、上の図の様な 2-ツイスト-スパン トリフォイルを表すチャートがある。リボンチャートは白頂点のないチャートと C 同値なものをいう。

Γをチャートとする。チャートΓの型を次のように定める。白頂点を含むΓ_iの内、ラベル i が最小のものをmとする。チャートΓが（$m; n_1, n_2, \cdots, n_k$）であるとは、各 $i=1,2,\cdots,k$ に対して、$w(\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1})=n_i$ であり、$w(\Gamma_{m+k}) \neq 0$ であり、各 $i > m+k$ に対して、$w(\Gamma_i)=0$ である。ここで、$w(G)$ はグラフ G に含まれる白頂点の個数とする。

白頂点の数が６の最小チャートの型は、(m;6), (m;4,2), (m;3,3), (m;2,2,2)の４種類を調べればよい。上の 2-ツイスト-スパン トリフォイルと呼ばれる曲面結び目を表すチャートは（1;4,2）型のチャートである。今まで分類表作成のために、白頂点の数が４個、５個、７個について調べていた。白頂点の数が６個である最小チャートは、４種類の型 (m;6), (m;4,2), (m;3,3), (m;2,2,2)について調べればよいが、これらについて調べて、次のような結果が得られた。「丁度６個の白頂点を含む最小チャートは“2-ツイスト-スパン トリフォイルを表すチャート”か、後５種類のいずれかのチャートを含むこと」が示された。

これまでの多くのチャートに関する結果は、C 変形と言う n-チャートの間での変形のもので、白頂点が最小のものを調べた結果である。この変形以外にも共役変形と安定化変形と呼ばれるチャートの変形がある。この２つの変形に対して、それらのチャートに対応する２つの曲面絡み目は同値であることが知られている。特に、安定化変形は n-チャートを(n+1)-チャートに変形するものである。

丁度６個の白頂点を含む最小チャートは６種類のチャートのいずれかを含むことが分かったが、更に共役変形と安定化変形も考えると、白頂点を含む最小チャート（CS-最小チャートと呼ぶ）は、リボンチャートと“2ツイスト-スパン トリフォイルを表すチャート”の積である」ことが示された。

これらの結果から、白頂点の数が７個以下のチャートについて、リボンチャートを無視すれば、分類が終わったことになる。また、今まで使い方の分らなかった安定化変形の使い方が分り、画期的なことは安定化変形を用いた一般的な変形方法が開発されたことである。これによって、C-変形では分類出来

ないチャートが分類されたのである。

（６）（５）より、次の目標として、白頂点が８個と９個のチャートが考えられる。

型 $(n_1,n_2,\cdots,n_k)$のチャートΓに対して、もし $n_2,\cdots,n_{k-1}$ のいずれかが、０であるならば、Γは２つのチャートの積に C 同値であることが示されている。２つのチャートの積とは交わらない２つの円板内にあるチャートの和集合で表されるチャートのことをいう。

これを用いて、次の型を調べればよいと分かった。白頂点が丁度８個の最小チャートは、９種類の型、(8), (6,2), (5,3), (4,4), (4,2,2), (3,3,2), (3,2,3), (2,4,2), (2,2,2,2)について調べればよいことが分かった。

白頂点が丁度９個の最小チャートは、１５種類の型、(9), (7,2), (6,3), (5,4), (5,2,2), (4,3,2), (4,2,3), (4,1,4), (3,4,2), (3,3,3), (2,5,2), (4,1,2,2), (3,2,2,2), (2,3,2,2), (2,2,1,2,2)について調べればよいことが分かった。

これらの沢山の型のチャートを調べることは次回の課題の１つである。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　５件）

① Teruo Nagase, Akiko Shima, Gambits in charts, J. Knot Theory Ramifications, 査読あり, Vol. 24 No 9. (2015), 1550052 (21 pages)
DOI: 10.1142/S0218216515500522

② Teruo Nagase, Akiko Shima and Hiroshi Tsuji, The closures of surface braids obtained from minimal n-charts with four white vertices, J. Knot Theory Ramifications, 査読あり, Vol. 22 No 2. (2013), 1350007 (27 pages)
DOI: 10.1142/S0218216513500077

③ Teruo Nagase and Akiko Shima, On charts with two crossings II, 査読あり, Osaka J. Math. 49 (2012) 909—929
http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/ojm/

④ Satoru Ishida, Teruo Nagase and Akiko Shima, Minimal n-charts with four white vertices, J. Knot Theory Ramifications, 査読あり, 20 (2011) 689—711
DOI: 10.1142/S0218216511008899

⑤ Teruo Nagase, Daisuke Nemoto and Akiko Shima, There exists no minimal n-chart of type (2,2,2), Proceedings of the School of Science, Tokai University, 査読あり, 46 (2011) 1-31

〔学会発表〕（計　１１件）

① 志摩亜希子，永瀬輝男，CS-minimal chart の性質について，日本数学会2016年度年会，2016 年 3 月 16 日，筑波大学(茨城県)

② 志摩亜希子，永瀬輝男，Properties of CS-minimal charts, The 11th East Asian School of Knots and Related Topics, 2016 年 1 月 26 日，大阪市立大学（日本）

③ 志摩亜希子，永瀬輝男，CS-minimal charts with exactly six white vertices, ４次元トポロジー，2015 年 11 月 22 日，大阪市立大学（大阪府）

④ 志摩亜希子，永瀬輝男，C-minimal 5-charts with four crossings，日本数学会 2015 年度秋季総合分科会 2015 年 9 月 13 日，京都産業大学，(京都府)

⑤ 志摩亜希子，永瀬輝男，5-charts with four crossings，多様体のトポロジーの展望，2014 年 11 月，東京大学大学院数理科学研究(東京都)

⑥ 志摩亜希子，永瀬輝男，crossing を４つ含む 4-chart について，日本数学会 2013 年度秋季総合分科会，2013 年 9 月、愛媛大学（愛媛県）

⑦ 志摩亜希子，永瀬輝男，There does not exist any 4-minimal 4-chart with four crossings representing spheres, Hurwitz action とその周辺，2013 年 1 月，群馬大学(群馬県)

⑧ 志摩亜希子，永瀬輝男，Suspicious minimal 4-charts with four crossings, ４次元トポロジー，2012 年 11 月，広島大学(広島県)

⑨ 志摩亜希子，永瀬輝男，Crossing を４つ含む linear 4-chart について，日本数学会 2012 年度年会トポロジー分科会，日本数学会，2012 年 3 月，東京理科大学(東京都)

⑩ 志摩亜希子，永瀬輝男，Linear 4-charts with four crossings, The 8th East Asian School of Knots, Links and Related Topics in Geometric Topology，2012 年 1 月，KAIST(韓国)

⑪ 志摩亜希子，永瀬輝男，4-charts with four crossings，４次元トポロジー，2011 年 11 月，広島大学(広島県)

６．研究組織
(1)研究代表者

志摩　亜希子（SHIMA, Akiko）
東海大学・理学部・教授
研究者番号：５０３１７７６５