4版

様 式 Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９ （共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ９ 月 １３ 日現在

機関番号：３２６８９
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４０１１０

研究課題名（和文）無限生成の対象の研究（１ー２次元の野性的空間と基本群）

研究課題名（英文）Infinitely generated objects (1-2 dimensional wild spaces and fundamental groups)

研究代表者
江田　勝哉（Eda, Katsuya）

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号：９００１５８２６

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円

研究成果の概要（和文）：以下,それぞれの課題について結果を述べる。(1)　2次元で１次元的には単純なペアノ空間の4種類の構成法を示した [2,3]。 (2) 有限生成自由群の列の逆極限群は有限生成自由群のほか、丁度４つある[4]。 (3) 極小 Grope 群から Grope 群への準同型写像が非自明なら、Grope は極小 Grope と同じ枝をもつ [5]。 (4) Solenoid 上連結な無限 sheeted カバーが存在する [6]。 (5) Peano連続体の特異ホモロジー群は有限生成自由アーベル群かHawaiian Earring の特異ホモロジー群と同型である [1]。

研究成果の概要（英文）：We studied on the subjects (1) 2 dimensional nonaspherical cell-like continua [2,3]; (2) The inverse limits of finitely generated free groups [4]; (3) Grope groups [5] (4) Covering maps over topological groups [6]; (5) Singular homology groups of one-dimensional Peano continua [1].

(1) We propose four constructions of spaces which produce 2 dimensional nonaspherical cell-like continua. There exists a Peano continuum for each two of them which shows the difference of the two constructions. (2) The inverse limits of inverse sequences of free groups of finite rank are free groups of finite rank or four non-isomrphic groups. (3) If there exists a nontrivial homomorphism from the minimal grope group to another grope group, then the grope has a binary braching part as the minimal grope. (4) There exist infinite sheeted covering maps over any solenoids. (5) Singular homology groups of one-dimensional Peano continua are free abelian groups of finite rank or that of the Hawaiian earring.

研究分野：位相幾何学

キーワード：fundamental group　wild spaces　one dimensional　two dimensional　Peano continua　singular homology group　topological group　grope group

1. 研究開始当初の背景：

この研究はその前の研究課題において１次元ペアノ空間の基本群がそのホモトピー型を決定するという結果を得たため、その方向をさらに推し進めるということと、それを踏まえて、野性的空間の研究対象を広げる意図があった。また既に、２次元の野性的空間についての基本群、ホモトピー群、ホモロジー群の研究が進みつつあった。

2. 研究の目的：

１次元空間の基本群、特異ホモロジー群のほか２次元の野性的空間についての基本群、特異ホモトピー群の研究, また野性的位相群の研究を目的とした。とくに、１次元ペアノ空間の基本群がそのホモトピー型を決定していることを踏まえ、１次元で基本群の群論的研究とともに基本群よりもゆるい情報も研究の対象としてホモトピー型の決定性、とくにホモロジー群の構造とホモトピー型の関係解明、２次元では、すべてのホモトピー群は自明となるペアノ空間の可縮性に関わることの解明を目的とした（１次元のペアノ空間は単連結であれば可縮であることはよく知られている)。

3. 研究の方法

１次元空間の道を使った無限語の研究は研究代表者以外に研究がないこともあり、研究発表を通して進めるが、他の課題、つまり研究成果 [2]-[6] では、各々の課題の研究者たちと、共同研究をする。研究集会の際に討論を行うほか、大学の訪問、E-mail の交換を通じての共同研究をする。

4. 研究成果

[ ] で示した番号は以下に記載した発表論文の番号である。(1) 2 次元セルライクなペアノ空間 [2,3] (2) 有限生成自由群の列の逆極限群 [4] (3) Grope 群 [5] (4) 位相群上の被覆写像 [6] (5) ペアノ連続体の特異ホモロジー群。各々の課題について、結果を説明する。

(1) すでに出版した論文 (K. Eda, U. H. Karimov and D. Repovš, A new construction of simply connected noncontractible cell-like continua, Fund. Math., **195** (2007), 193–203; K. Eda, U. H. Karimov and D. Repovš, A nonaspherical cell-like 2-dimensional continuum andrelated constructions, Topology Appl., **156** (2009), 515–521）で 2 次元 cell-like 単連結でホモトピー群 π_2 が非自明なペアノ空間として Snake 空間と交代コーン空間があった。これらの構成では、ペアノ空間であることを保証するために曲がりくねった空間、あるいは 無限個のコーンを交互に反対向きに並べた空間に正方形を貼り付けることをしていた。この正方形部分を単位区間につぶした構成が新たなペアノ空間の作り方で、もとの 2 つ構成に加え全部で 4 種類の構成法ができる。これらの構成に関して、どの 2 つともホモトピー同値 とならないペアノ連続体のあることを示した。以前、 2 次元セルライク単連結でホモトピー群 π_2 が非自明な空間は知られていなかった。これらの結果からそれらのなかにホモトピー同値ではないものが多くあることがわかる。これらの結果は、研究目的に書いた 2 次元の可縮性の問題が肯定解をもつ可能性をうかがわせるものとなっている。また、2 次元トーラスを Hawaiian earring（半径が 0 に収束する無限個の円周を 1 点につけた空間）のように接着点の近傍に有限個のトーラス以外がすべて含まれる空間を研究し 2 次元ホモトピー群 π_2 が自明であるが 2 次元ホモロジー群 H_2 は可算生成の自由アーベル群となることを証明した。これは 2 次元 Hawaiian earring の 2 次元ホモトピー群 π_2 と 2 次元ホモロジー群 H_2 は同型で整数群の可算直積となることと対照的であるばかりでなく、野性的な接着空間からホモロジー群で無限和（無限積でなく）の構造が現れることのわかる自然な例となっている。この証明の際、ホモトピーの構成に際し、可算半順序から有理数の全順序への順序保存写像を使った新たな手法を開発した。この方法は今後の野性的代数トポロジーの有力な武器となる可

能性をもっている。

(2) 有限生成自由群の列の逆極限群は１次元コンパクトな可分距離空間のČech ホモトピー群(シェイプ群) であり、有限生成自由群、Hawaiian earring の場合のČech ホモトピー群の他、３つの群が現れる。その３つとは、1. 可算生成自由群 2. Hawaiian earing の場合の有限生成自由群による射影系の代わり、各々に可算生成自由群を自由積で加えてできた射影系の極限群 3. Hawaiian earing の場合の射影系における整数群の代わり、可算生成自由群を使ってできた射影系の極限群、である。さらにこれらが非同型であることを証明した。

この射影系が全射からなる場合、逆極限群は１次元 compact で局所連結な可分距離空間のČech ホモトピー群となり有限生成自由群、Hawaiian earring の場合のČech ホモトピー群しかなく Čech ホモロジー群の場合と同じになる。Čech ホモロジー群の場合は可換群であるため、局所連結性がない場合でも有限生成自由アーベル群、Hawaiian earring の場合の Čech ホモロジー群しか現れない。これらの結果、有限生成自由群の列の逆極限群の分類は可算生成自由群の列の逆極限群の分類と同じものとなるが、可算生成自由群の列の逆極限群は１次元可分距離空間の Čech ホモトピー群である。有限生成自由アーベル群の列の逆極限群の分類には可算生成の自由アーベル群はあらわれない。ホモトピー群による分類は特異ホモロジー群の場合よりも細かい分類をもつが、Čech ホモロジー群ではコンパクトであるかないかを区別できるのにくらべČech ホモトピー群についてはそれができないことになり、Čech ホモトピー群は必ずしも Čech ホモロジー群より細かい分類をあたえるとは限らないことを示している。

(3) Grope とは円周から始めて一般穴の開いたハンドル付きの円板を新たにできた円周につけることを無限回くりかえしてできる位相空間である。ハンドルの穴の数が異なるものを繰り返しつければ異なる空間ができると思われるがそれは、この論文まで分かっていなかった。とくに円周に一つの穴のハンドル付き円板を繰り返しつけてできるものを極小 Grope と呼ぶ。Grope の基本群を Grope 群といい、これらは完全群で、局所自由群である。また Grope は Grope 群の展開空間であるため、Grope の空間としての情報は Grope 群がすべてもっている。一般に局所自由群でかつ完全である群は群の性質による構造分析が難しく、Grope 群の非同型性は全く知られていなかったため、上記のような状況であった。この論文で極小 Grope 群から Grope 群への準同型写像が非自明なら、Grope は極小 Grope と同じ枝をもつことを示した。このことにより、極小 Grope 群と他の多くの Grope 群の非同型性が証明された。つまり、極小 Grope と他の多くの Grope はホモトピー同値ではない。

(4) 与えられた位相群 G に連結空間 X からの被覆写像 $f : X \to G$ があたえられているとき、X が位相群となり f が準同型写像となるような群構造を X に導入することができるか? という自然な問題がある。局所弧状連結である場合、肯定的であることは 1950 年代からよく知られており Ponrjagin の Topological group（位相群）にもその子細な証明が書かれている。共著者である V. Matijević は G が コンパクトで f が有限カバーならば上記の問題の答えが肯定的であることを示している。この論文ではコンパクト群上では肯定的であることが f がオーバーレイとなっていることが同値であることを示した（なおオーバーレイ は R. Fox が 1962 年に局所的に野性的な空間に対して被覆写像の代わりに応用する目的で導入されたものである）。次に、1 次元コンパクトアーベル群であるソレノイドに関しては無限カバーはオーバーレイでないこと、つまり無限カバーの場合は上記の答えが否定的であることを示した。さらに、すべてのソレノイドに対して各々、連結空間を構成し、そこからの無限カバーとなる被覆写像を構成した。このことから、1 次元コン

パクトアーベル群であるソレノイドに関してはソレノイドを被覆する空間に被覆写像が準同型写像となるような群構造を導入できないことを示している。最後のソレノイド上の無限カバーはソレノイドの断面を群論的に表現し、初等初頭整数論の補題を証明することにより連結性を証明しており、構成した空間の連結性の考察を初等整数論の議論に帰着して解決している。

(5) さきに述べたように１次元のペアノ連続体のホモトピー型はその基本群で決定されることは、本研究課題の前の課題において本研究者により証明されている。さらにペアノ連続体が至るところ野性的である場合、同相性がその基本群で決定されることが本研究代表者によって示されている　（ K. Eda, The fundamental groups of one-dimensional spaces and spatial homomorphisms, Topology Appl., **123** (2002), 479–505）。これにより１次元 Peano 連続体の基本群は極めて沢山あることがわかる。これに反して基本群のアーベル化である特異ホモロジー群は 1 次元ペアノ連続体が局所擬単連結の場合、自由アーベル群になる以外、常に Hawaiian Earring の特異ホモロジー群と同型であることを証明した。すでに本研究者は川村とも共著論文（K. Eda and K. Kawamura, The sigular homology of the Hawaiian earring, J. London Math. Soc., **62** (2000), 305–310）の中で

Hawaiian Earring の特異ホモロジー群が 1. 整数群の可算直積 2. 有理数群の連続濃度の直和、3. 連続濃度の自由アーベル群の $\mathbb{Z}$-adic 完備化、の３つの群の直和であることを証明していたが、この論文では擬局所的単連結でない点、つまり野性的が１点でもあれば特異ホモロジー群はこの群と同型となることを証明した。結果的に Hawaiian Earring の特異ホモロジー群の同型となるわけである。2 の群はねじれのない可除群で，　3 の群はねじれのない代数的コンパクト群であり、証明はこれらの群のアーベル群論的性質と野性的代数トポロジーのテクニックとを縦横に使っておりで同型写像を空間的考察から構成することはできず、超越的な定理である。また研究目的のうち１次元に関する大きな部分を達成したことになる。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文　６件」

[1] <u>K. Eda</u>, Singular homology groups of one-dimensional Peano continua, Fund. Math. **232** (2016), 99–115. doi:10.4064/fm232-2-1（査読あり）

[2] <u>K. Eda</u>, U. H. Karimov and D. Repovš, On 2-dimensional nonaspherical cell-like Peano continua: a simple approach, Meditarranean J. Math., **10** (2013), 519–528. doi:10.1007/s00009-011-0165-1（査読あり）

[3] <u>K. Eda</u>, U. Karimov, D. Repovš and A. Zastrow, On Snake cones, alternating cones and related constructions, Glasnik Mate., **48**(**68**) (2013), 115–135. https://web.math.pmf.unizg.hr/glasnik（査読あり）

[4] <u>K. Eda</u> and J. Nakamura, The classification of the inverse limits of free groups of finite rank, Bull. London Math. Soc., **45** (2013), 671–676. doi:10.1112/blms/bds123（査読あり）

[5] M. Cencelj, <u>K. Eda</u>, and A. Vavpetič, Maps from the minimal grope to arbitrary gropes, Inter. Jour. Algebra Comp., **23** (2013), 503–519. doi:http://dx.doi.org/10.1142/
S0218196713500070（査読あり）

[6] <u>K. Eda</u> and V. Matijević, Covering maps over solenoids which are not covering homomorphisms, Fund. Math. **221** (2013), 69–82. doi:10.4064/fm221-1-3 （査読あり）

[学会発表](計３件)

[1] <u>K. Eda</u>, “Algebraic topology of one dimensional spaces”, Pan Pacific international conference of Topology and its applications, Zhangzhou, China, November 26, 2015.

[2[K. Eda, “Covering maps over topological groups”, Dubrovnik Topology VIII, Dubrovnik, Croatia, June 22, 2015.

[3] K. Eda, “Singular homology of Peano continua”, Joint meeting of DMS and PMS, Poznan, Poland, September 18, 2014.

6. 研究組織

研究代表者
江田　勝哉 (EDA, Katsuya)
早稲田大学・理工学術院・教授
研究者番号: 90015826