様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月 １６ 日現在

機関番号：３４３１５
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１１３

研究課題名（和文）３次元多様体の同境圏におけるホモロジー同境不変量の構造

研究課題名（英文）Structures of homology cobordism invariants in the cobordism category of 3-manifolds

研究代表者
福本　善洋（Fukumoto, Yoshihiro）

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：９０３４１０７３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,400,000円、（間接経費）　　1,020,000円

研究成果の概要（和文）：２つの３次元多様体が、滑らかな４次元多様体の境界として実現されるとき同境であるという．特にそれが多様体の位相不変量の一つであるホモロジー群を保つとき，ホモロジー同境であるといい，その構造は位相不変量の一つである基本群の深さを反映している．本研究では，ゲージ理論とよばれる物理に由来する方法によって，レンズ空間とよばれる３次元多様体の幾つかがある種の滑らかな４次元多様体の境界であるための必要条件を，その同境を与える４次元多様体上の基本群の表現を用いて与えた．また，３次元球面から結び目を除いた空間の基本群のある種の行列への表現全体が作る空間のトポロジーを明示的に解析し，ある部分の構造を決定した．

研究成果の概要（英文）：Two 3-manifolds are called cobordant if they are realized as the boundary of a smooth 4-manifold. In particular, if it preserves the homology group which is one of the topological invariants of manifolds, then they are called homology cobordant, and their structures reflect the depth of the fundamental group which is also one of the topological invariants. In this research, by using a method called the gauge theory which originates in physics, we gave a necessary condition for several number of 3-manifolds called lens space are the boundary of a certain kind of smooth 4-manifold in terms of representations of the fundamental group of the 4-manifold giving the cobordism. Moreover, we explicitly calculated the topology of the space of all representations in a certain kind of matrices of the fundamental group of the space obtained by removing a knot from the 3-sphere, and determined the structure of a certain part.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：ホモロジー同境　ゲージ理論　結び目　指標多様体　平坦接続　チャーン・サイモンズ不変量　指数定理　オービフォルド

１．研究開始当初の背景

ホモロジー同境群は，5 次元以上の位相多様体の三角形分割可能性の予想とも関わってきた重要な対象である．この三角形分割予想については，Seiberg-Witten Floer ホモロジーを用いた C. Manolescu の議論によって否定的に解決された一方で，ホモロジー同境群の構造は依然として未知であり，その解明には，基本群の非可換性を捉える不変量の構成と，ホモロジー同境の幾何的構成の双方からの接近が必要となる．本研究は次の３つの研究の流れを汲むものである．

（１）松本幸夫氏は，bounding genus とよばれるホモロジー同境群におけるある種の距離を与えるホモロジー同境不変量を導入し，Dehn-Kirby 算法でその上界を与えるとともに，不変量の確定の「困難さ」を，スピン 4 次元閉多様体の符号数と第２Betti 数の間の不等式（11/8 予想）として定式化した．

（２）R. Fintushel と R. Stern は，Seifert ホモロジー球面を 4 次元オービフォルドの境界として実現し，Donaldson 理論を応用することによって，ホモロジー同境群が無限巡回群を含むことを証明した．古田幹雄氏はこの手法をさらに推し進め，同境群が無限個の生成元を含むことを示した．さらに M. Hedden と P. Kirk によって Z/2 係数のホモロジー同境群に対しても同様の結果が得られた．これらの結果は，管状の端を持つ 4 次元多様体（またはオービフォルド）上の SO(3)インスタントン (ASD 接続) のモジュライ空間のコンパクト性を，その端の３次元多様体上の平坦接続が定める Chern-Simons 不変量によって統制することで得られる．

（３）古田氏は，Seiberg-Witten モノポールのモジュライ空間のコンパクト性を用いて，Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似を構成し，これによりスピン 4 次元閉多様体に対して，11/8 予想の弱形にあたる 10/8-不等式を導出した．この結果によって，負定値とは限らないスピン４次元閉多様体に対して，同境の複雑さを捉える一つの手段が与えられたといえる．

本研究は以下の３つの結果を出発点とする．

① 古田-亀谷の 10/8-不等式と 3 次元多様体の同境圏

古田氏と亀谷幸生氏は，スピン 4 次元閉多様体の１次コホモロジーを Seiberg-Witten 方程式のパラメータとする有限次元近似を用いて Jacobi トーラス上の球面束の間の Pin(2)同変写像を構成し，10/8-不等式を１次コホモロジーの 4 重カップ積の情報だけ改良した．筆者は，この結果に基づき，3 次元多様体の同境圏から次数付き可換環からなる ある代数的な圏へのホモロジーの関手Φを構成し，Rohlin 不変量の整数持ち上げを与える 3 次元ホモロジー球面のホモロジー同境不変量（w 不変量）を次数付き可換環の間の代数的な射を同境によって実現する障害として一般の 3 次元多様体に拡張した．

② 次数付き可換環からなる代数的圏と非結合的代数の構成

w-不変量を 3 次元多様体の同境圏の枠組みに拡張する際の副産物として，次数付き可換環のある代数的な射から，形式的な代数を構成することができる．この代数は同境から Fintushel-Stern の構成法で得られる 4 次元閉オービフォルドのコホモロジー環に対応するものであり，仮想的なカップ積の結合性の破綻が射を実現する位相的な同境の存在に対する強力な障害を与えることがわかる．

③ Bounding genus の決定と 3 次元多様体の同境圏への拡張（Φ-bounding genus）

松本幸夫氏は Seifert ホモロジー球面を含むホモロジー球面の族に対して，Dehn-Kirby 算法を用いてその bounding genus の上界を与えた．筆者は 10/8-不等式のオービフォルド版を応用し，w-不変量を用いることによって bounding genus の下界を与え，松本氏の結果と組み合わせることで Seifert ホモロジー球面の幾つかの無限系列に対する bounding genus の値を決定した．さらに，コホモロジー環の代数的射を実現する同境の長さを測る尺度として bounding genus の一般化（Φ-bounding genus）を与え，古田-亀谷 10/8 不等式を応用することにより，その下界公式を与えた．

２．研究の目的

3 次元多様体の同境圏とホモロジー同境不変量の構造

3 次元ホモロジー球面のホモロジー同境群の構造は現在でもほとんど解明されていない．本研究の目的は，ホモロジー同境を 3 次元多様体の同境圏からある代数的な圏への関手のファイバーとして捉え，オービフォルド上のゲージ理論を応用することにより，ホモロジー同境不変量の一つである bounding genus を圏論的に精密化し，その構造を解明する手法を確立することにある．本研究では，特に（１）bounding genus の構造とその精密化，（２）3 次元多様体の同境圏ホモロジー同境モノイドの構造の解明，（３）位相的重力理論への応用に取り組むための枠組みを構築することを目的とする．

３．研究の方法

本研究の目的には，3 次元多様体のホモロジー同境モノイドの構造の解明があり，その研究の段階として，（１）ホモロジー同境不変量の一つである bounding genus を圏論的に精密化すること，（２）3 次元多様体の同境圏からある代数的な圏への関手のファイバー構造を調べること，の二つの段階に分けることができる．その段階に応じた研究方法として（１）では bounding genus の圏論的精密化の一つの試みであるΦ-bounding genus の

考察にオービフォルド上のゲージ理論を用いる解析的な方法，（２）では３次元多様体の同境圏において，ホモロジー同境圏を，射を同型射に制限した部分圏の関手 Φ によるファイバーとして捉え，そのファイバーの構造を Φ-bounding genus を用いて考察する代数的な方法を検討した．
これまでの結果から①ゲージ理論，②ホモロジー代数，③基本群の３つがおおきく関わり合っていることが推察される．実際，古田幹雄氏による，レンズ空間の間の負定値同境と，同境の基本群の SU(2)平坦接続との関係の研究では，オービフォルド上の Donaldson 理論において，特異点でバブル現象を起こすことによって，エネルギーが零のインスタントン，すなわち平坦接続が生成され，同境の基本群の SU(2)表現が得られる．このような現象は，Seiberg-Witten 理論や，Ozsvath-Szabo 理論では直接には観測することが困難な現象である．本研究では，この方法をさらに推し進め，管状の端をもつ４次元多様体上のインスタントンが端に向かって逃げ去る現象を捉える．また一方において，基本群の SU(2)表現，特に，３次元多様体の結び目の補空間に対する基本群の SU(2)表現空間に関しては，P. Kronheimer と T. Mrowka による被約インスタントン鎖複体の研究があり，さらに，M. Hedden, C. Herald と P. Kirk によって，これを零跡 SU(2)表現空間の枕袋における Lagrange 交叉として捉える研究がある．本研究では，この３次元多様体の側面から基本群の表現を捉える研究を同時に遂行した．

４．研究成果

（１）Φ-bounding genus は，2 つの 3 次元多様体と，そのコホモロジー環の間の代数的射，およびコホモロジー環に関する境界条件に対して整数値をとる不変量であり，弱い劣加法性を持つ意味において，ある種の距離にあたる概念であるといえる．一方の 3 次元多様体とホモロジー同境であるもう一つの 3 次元多様体に対し，そのホモロジー同境によって誘導される代数的射，および境界条件に関して，2 つの bounding genus が等しいことを証明した．このホモロジー同境不変性が，ホモロジー同境圏の構造を調べる一つの手法を与えるものと期待される．また，特に有理ホモロジー球面とそのスピン構造との組に対して，mod 16 で定まる Rohlin 不変量の値ごとに，それらのペアに対する bounding genus が定義され，レンズ空間や幾つかの鉛管型有理ホモロジー球面とそのスピン構造の組に対して，それらの下界の考察を行った．

（２）インスタントン・ゲージ理論のレンズ空間のコボルディズムへの応用
Donaldson 理論や Seiberg-Witten 理論における Froyshov の h-不変量や Ozsvath-Szabo 理論における d-不変量は，Floer ホモロジーの構造を用いて構成され，有理ホモロジー球面の Spin-c 有理ホモロジー同境類全体の群から有理数体の準同型を定める．同境を与える４次元多様体が負定値（交叉形式が負定値）であれば，これらは Spin-c 構造から定まる 1 次 Chern 類の自己交叉数や第 2 Betti 数に対して上からの評価を与える．一方において，Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似から得られる古田氏の 10/8 不等式は，４次元多様体がスピンであれば，負定値ではなくとも同境の複雑さを捉える一つの手段を与える．これらの議論ではモジュライ空間のコンパクト性が重要な役割を果たしている．本研究は，モジュライ空間が非コンパクトであることを利用して，これを同境の問題に応用するものである．実際，S. K. Donaldson は，滑らかな負定値閉 4 次元多様体の交叉形式が標準的であるという結果に，インスタントンのバブル現象を用いた．また，P. Lisca は，この Donaldson の結果を応用して，幾つかのレンズ空間の連結和であって，それらが滑らかな有理ホモロジー球体の境界になるものを完全に分類した．これらの結果を受け，本研究では以下の課題について考察した．
課題: 幾つかのレンズ空間から有理ホモロジー球面への滑らかな負定値同境が存在するとき，その同境が与える代数的射の構造を決定せよ．
本研究では，古田幹雄氏との共同研究を行い，レンズ空間の間の滑らかな負定値同境に付随して構成されるオービフォルドを用いた定理を，管状の端をもつ滑らかな 4 次元多様体上の議論に拡張して以下の結果を得た．幾つかのレンズ空間から整係数ホモロジー球面へのある種の滑らかな負定値同境が存在するための必要条件を，ホモロジー球面の Chern-Simons 不変量と，同境の基本群の U(1)表現（同境の整係数１次元ホモロジー群から U(1)への準同型）を用いて与えた．特に，各々のレンズ空間の 1 次元ホモロジー群の位数が Chern-Simons 不変量から定まる定数よりも大きいとき，境界に(m,1)型レンズ空間の成分があれば，必ず(m,-1)型レンズ空間の成分も存在して，ある種のペアをなしていることがわかる．この結果は，同境が誘導する代数的射の構造をそれらの U(1)表現によって捉えたものとみなすことができる．
詳細には，①レンズ空間の間の有理ホモロジー同境の問題，および②レンズ空間と有理ホモロジー球面との負定値同境の問題を考察した．①に関しては，(m,1)型レンズ空間および (m,-1)型レンズ空間の幾つかのコピーが与えられたときに，それを境界とする滑らかなコボルディズムであって「簡単なもの」は，ホモロジー的に区間と(m,1)型レンズ空間との直積の幾つかのコピーの連結和の形しか存在しないことを示した．その際，インスタントン数 1/m の SU(2)インスタントンのモジュライ空間を考察し，バブル現象を解析することによって，バブルの結果生じる平坦接続

を得た．さらに，ASD 方程式のホロノミー摂動を用いることによって，可約な U(1)平坦接続しか生じない状況に帰着させて，多様体のホモロジー的な性質にしかよらない弱い条件のもとで結論を得ることができた．②では，同境に管状の端を付け加えた滑らかな 4 次元多様体上のエネルギー1/m をもつ SU(2)インスタントンのモジュライ空間を考察することにより，端に向かって逃げ去るインスタントンの列の弱極限として平坦接続が得られ，さらに摂動により可約な平坦接続が得られる．そこでは(m,1)型レンズ空間の管上の 1/m インスタントンのモジュライ空間が実数全体と同相になることを用いており，４次元球面上の同変インスタントンに関する古田氏と橋本義武氏の結果を用いることにより，一般のレンズ空間や球面空間型に対して議論することが可能になる．また，Seifert ホモロジー球面の管上のインスタントン・モジュライ空間や，モジュライ空間の向きを考察することで，より精密な結果を得ることも今後の課題として考えられる．

（３）３次元球面の結び目の補空間の SU(2)表現空間の解析

3 次元多様体上の SU(2)平坦接続のモジュライ空間は，基本群の SU(2)表現全体の共役類である指標多様体であり，管上のインスタントンに対する端の無限遠の極限として現れる．Hedden-Herald-Kirk は，3 次元球面における結び目に対し，Kronheimer-Mrowka による被約インスタントン鎖複体の生成元に対応する以下の対象を考察した．それは結び目を，ある 3 次元球体に含まれる自明な 2-タングルと，その外側におけるタングルに分解し，それぞれの補空間の基本群の零跡 SU(2)表現空間の，4 点穴空き球面の基本群の零跡 SU(2)表現空間（枕袋）における Lagrange 交叉がそれに対応する．ここで，外側の表現空間において，タングルの耳飾付き零跡 SU(2)表現空間に対し，タングルの補空間内の閉曲線に沿ったホロノミー摂動を明示的に与え，その枕袋における像を決定した．そこで本研究では以下の課題に取り組んだ．

課題: 3 次元多様体における結び目に対して，Hedden-Herald-Kirk の零跡 SU(2)表現の枕袋における Lagrange 交叉を考察することにより，Kronheimer-Mrowka の被約インスタントン鎖複体を決定せよ．

筆者は，インディアナ大学の P. Kirk 氏と J. Pinzon 氏との共同研究により，①トーラス結び目やプレッツェル結び目に対して枕袋における表現空間の像を明示的に計算し，その Lagrange 交叉が被約インスタントン鎖複体の生成元に対応していることを観測した．②また，SU(2)表現との 2 重分岐被覆の SO(3)表現との関係から，表現空間において双二面体群に退化するものを完全に分類し，さらに枕袋における像がそのオービフォルド被覆における，幾つかの直線分の和集合として与えられることを示した．

特に，①では，3 次元球面における結び目の特別な配置のもとで，ある 3 次元球体に含まれる自明な 2-タングルと，その外側における 2-タングルに分解し，特に，外側の 2-タングルの補空間の基本群の零跡 SU(2)表現空間の，4 点穴空き球面の基本群の零跡 SU(2)表現空間(枕袋)における像を考察した．外側の表現空間は 1 次元の有限複体と同相な実解析的多様体で，可換表現からなる直線と，非可換表現からなる幾つかの弧が，その端点において可換表現の直線に接着したもの，および幾つかの円周との非交和として表される．一方，それらの枕袋上の像は，枕袋の角度座標について，逆三角関数などで 1-助変数付けされる．具体的には，トーラス結び目やプレッツェル結び目に対して枕袋における表現空間の像を明示的に計算し，特に，幾つかの系列に対して，計算機を利用することにより，その Lagrange 交叉が，被約インスタントン鎖複体の生成元に対応していることを観測した．これにより，枕袋における Lagrange 交叉を計算機を用いることによって組織的に調べることが可能となった．また，②は，零跡 SU(2)表現において，双二面体群に退化するものの特徴付けは，タングルの二重分岐被覆の基本群の SO(3)表現で SO(2)に退化するものが，タングルの SU(2)表現で双二面体群に退化するものに持ち上がるという観測に基づくものである．これら一連の考察を，跡が零とは限らない U(1)定値であるような SU(2)表現に対して拡張することも今後の課題である．

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1　件）

1. w-Invariants and Fintushel-Stern invariants for Plumbed Homology 3-Spheres, <u>Y. Fukumoto</u>, Experimental Math. （査読あり）20(1) 2011, 1-14.

〔学会発表〕（計　7　件）

1. <u>Y. Fukumoto</u>, 10/8-inequality and plumbed rational homology 3-spheres, Algebraic Topology Seminar, 2014/03/26, University of Warsaw, Warsaw, Poland.

2. <u>福本善洋</u>，古田幹雄，レンズ空間の間の負定値同境について（古田幹雄氏（東京大学）との共同研究），研究集会「４次元トポロジー」, 2013/11/15, 広島大学，広島県.

3. <u>Y. Fukumoto</u>, On negative-definite cobordisms among lens spaces and instantons, USC Geometry and Topology Seminar, 2013/09/09, University of Southern California, Los Angeles, USA.

4. <u>Y. Fukumoto</u>, On negative-definite cobordisms among lens spaces and instantons, MSU Topology Seminar,

2013/09/04, Michigan State University, East Lansing, USA.
5. Y. Fukumoto, Furuta's 10/8 theorem, Topology Seminar, 2013/05/01, Indiana University, Bloomington, USA.
6. Y. Fukumoto, Cobordism among lens spaces and instantons, Geometry and Physics Seminar, 2013/02/20, University of Miami, Coral Gables, USA.
7. Y. Fukumoto, Cobordisms of lens spaces, Topology Seminar, 2012/11/07, Indiana University, Bloomington, USA.

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

○取得状況（計　0　件）

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
立命館大学・理工学部・教授
福本 善洋（FUKUMOTO YOSHIHIRO）
研究者番号：90341073