様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：３７１１１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４０１１６
研究課題名（和文）空間形内のキルヒホッフ弾性棒を中心とした１次元弾性体の研究

研究課題名（英文）Study on one-dimensional elastic bodies with a focus on Kirchhoff elastic rods in space forms

研究代表者
川久保　哲（KAWAKUBO, Satoshi）

福岡大学・理学部・助教

研究者番号：８０３６０３０３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,300,000円

研究成果の概要（和文）：完備リーマン多様体内のキルヒホッフ弾性棒の方程式の初期値問題を考察し、大域解が一意的に存在することを証明した。また、３次元ユークリッド空間内において、第４ソリトン曲線のある族をヤコビの楕円関数を用いて具体的に表し、この族の中に周期的なものが存在することを示した。これは回転トーラスに巻きつくような曲線となる。この周期的な第４ソリトン曲線を用いることにより、“空間曲線版変形KdV方程式”の周期的な合同解(形を変えずに動く解)を構成した。

研究成果の概要（英文）：The initial-value problem for the equations of Kirchhoff elastic rods in complete Riemannian manifolds was studied, and it was proven that there exists a unique global solution of this initial-value problem. Also, a class of fourth soliton curves in three-dimensional Euclidean space was explicitly expressed in terms of Jacobi elliptic functions, and it was proven that there exist periodic solutions in this class. Each periodic solution winds around a torus of revolution. By using these periodic fourth soliton curves, congruence solutions (solutions moving without change of shape) of the "space curve version of the modified KdV equation" were constructed.

研究分野：幾何学

キーワード：キルヒホッフ弾性棒　弾性曲線　変分問題　渦糸　局所誘導階層　ソリトン曲線　変形KdV方程式

１．研究開始当初の背景

空間の中でピアノ線を変形すると、元の真っ直ぐな形に戻ろうとする力が働く。このような、弾力が強くて細い針金状の物体を一次元弾性体という。一次元弾性体を曲げて曲線状にするとエネルギーが蓄えられるが、これは曲線の曲率の２乗の積分(曲げエネルギー)によって表される。この曲げエネルギーが臨界になる(つまり平衡状態になる)曲線をエラスティカという。一方、曲げエネルギーに、捩れエネルギー(棒を捩ることによって蓄えられるエネルギー)を合わせて考えることもできる。この２つのエネルギーの和が臨界になるような曲線(正確には枠付き曲線)をキルヒホッフ弾性棒という。

リーマン多様体内の曲線の研究は、様々な観点から多くなされているが、その大部分は測地線論であると言える。しかし，キルヒホッフ弾性棒のような、より複雑な曲線を考えることにより、測地線の場合には得られない、興味深い曲線が構成できる。例えば、変分問題の解曲線で、４次元以上の空間形内に充満に埋め込まれたものを構成せよ、という問題を考えてみる。測地線の場合、それ自身が一次元全測地的部分多様体であるから、もちろんそのようなものは一つも存在しない。実は、エラスティカの場合でも、そのようなものは存在しないことが知られている。しかし、キルヒホッフ弾性棒の場合、充満に埋め込まれたものが存在することが研究代表者によって示された。特に、５次元空間形内には、自然曲率がヤコビの楕円関数で陽に表されるようなものもある。このようなことから、キルヒホッフ弾性棒は、物理的な意義だけではなく、純粋に曲線論の観点から見ても興味深いクラスであると言えよう。

また、キルヒホッフ弾性棒やエラスティカは、曲面論、特に擬球、ウィルモア曲面、平均曲率一定曲面などへ応用できることが知られている。この際、ユークリッド空間以外のリーマン多様体の中で考えることが一つの鍵となる。例えば、２次元定曲率球面内のエラスティカを用いて、３次元ユークリッド空間内のウィルモア曲面の具体例が構成できることが知られており、これに類似した様々な結果が多く知られている。このような結果は、一次元弾性体を、曲がった空間(リーマン多様体)の中で考えることによって初めて得られるものである。

エラスティカやキルヒホッフ弾性棒は、オイラーの時代以来、主に２次元及び３次元ユークリッド空間内で考えられてきた。しかし、上に述べたように、一般の高次元リーマン多様体内のキルヒホッフ弾性棒やエラスティカを考えることにより、曲線論としての興味深い例が得られるだけでなく、曲面論への応用も広がる。このことから研究代表者は、一般のリーマン多様体内の一次元弾性体の数学的モデルを系統的かつ詳細に研究することが重要であるという認識に至り、本研究を開始した。

２．研究の目的

本研究課題の申請時における研究目的の主なものは以下の通りである。

(1) 高次元空間形内のキルヒホッフ弾性棒の具体的な表示式を求め、その幾何学的性質を明らかにすること。

３次元ユークリッド内でのキルヒホッフ弾性棒の具体的表示式は古くから知られており、３次元定曲率球面及び３次元双曲空間内においても、2008 年に研究代表者によって得られている。一方、４次元以上の空間形内においては、全てのキルヒホッフ弾性棒の具体的表示式を求めることは非常に難しい。しかし、上でも述べたように、５次元空間形内の充満なキルヒホッフ弾性棒には、曲率レベルで具体的に表示できるものがある。このキルヒホッフ弾性棒の幾何学的性質をさらに詳しく調べるため、曲線自身の具体的表示式を求める。また、この例の中に、閉じた(周期的な)曲線が存在することを示す。

(2) ３次元ユークリッド空間内の不安定な閉キルヒホッフ弾性棒を多く構成すること。

キルヒホッフ弾性棒の安定性、特に閉キルヒホッフ弾性棒の安定性を判定することは重要な問題であるが、一般にこの種の問題は難解であり、３次元ユークリッド空間内においてすら未解決である。実際、最も簡単な円の場合を除いては、ほとんど分かっていない状況である。研究代表者は、これに関連して、３次元ユークリッド空間内の閉キルヒホッフ弾性棒のエネルギー汎関数が、コンパクト性の条件 (パレ・スメール条件)を満たすことを証明している。この結果により、峠の補題が使えることがわかり、不安定な閉キルヒホッフ弾性棒が構成できると考えられる。本研究では、この方法により不安定な閉キルヒホッフ弾性棒を多く構成する。

(3) ３次元空間形内のソリトン曲線の具体的な表示式を求めること。

キルヒホッフ弾性棒の方程式は、19 世紀から“解ける方程式”として研究されてきたが、その背後に局所誘導方程式という無限次元可積分ハミルトン系が関わっていることが、1980 年代から分かってきた。局所誘導方程式に付随した発展方程式の無限列を局所誘導階層とよび、第 n 番目の発展方程式に対する定常問題の解を第 n ソリトン曲線という。３次元空間形内の第３ソリトン曲線はキルヒホッフ弾性棒に一致することが研究代表者によって示されており、その意味でソリトン曲線はキルヒホッフ弾性棒の一般化となっている。

研究代表者は、３次元空間形内のソリトン曲線の円柱座標表示を、その曲率と捩率を用いて陽に表した。従って、もし曲率と捩率を

何らかの特殊関数で具体的に表すことができれば、ソリトン曲線自身を完全に表示できたことになる。この事は、n が３以下ならば可能であることが既に分かっているが、n が４以上の場合はまだ示されていない。本研究では、n が４以上の場合に曲率と捩率を具体的に表し、第 n ソリトン曲線の完全な表示式を求める。

３．研究の方法

(1) 研究の目的の(1)に対する方法について述べる。上に述べたように、研究代表者は、５次元空間形内に充満なキルヒホッフ弾性棒のある族を構成し、これらの自然曲率をヤコビの楕円関数で陽に表した。なお、３次元空間形内の時には、キルヒホッフ弾性棒に対して、円柱座標を自然に構成することができ、曲率レベルに留まらず、曲線それ自身の具体的表示式を求めることができた。ここでは、この３次元空間形の時の方法を、５次元の場合にも拡張して座標を構成し、曲線それ自身の具体的表示式を求める。そしてこの表示式を用いて曲線が閉じるための条件を導出し、それを解析することにより、閉じたキルヒホッフ弾性棒の存在を示す。

(2) 研究の目的の(2)に対する方法について述べる。まず、閉キルヒホッフ弾性棒(つまり臨界曲線) の分類及び表示式は、既にアイヴィーとシンガーの研究によって、あるレベルまで得られていることに注意する。従ってそれらの安定性を判定するには、第二変分公式を計算してヘッシアンが正値かどうかを調べればよいと思われる。しかし、円でない閉キルヒホッフ弾性棒の場合、ヤコビ作用素の係数に楕円関数が含まれ、ヘッシアンは大変複雑になり、安定性の判定は困難になる。

そこで、ヘッシアンを直接解析することは避けて、より定性的な方法で、不安定閉キルヒホッフ弾性棒を構成することを考える。具体的には次のようなやり方で行う。まず、２つの簡単な“安定臨界点”を見つける。(これは多重円などを用いて作れると予想される。) そして、峠の補題を用いて、それら２つの“池の底”を結ぶ道のどこかに“峠”に対応する不安定臨界点が存在することを示す。この不安定臨界点が、円でない不安定な閉キルヒホッフ 弾性棒に他ならない。

なお、峠の補題は、相当強い条件の下でしか成り立たないので、注意が必要である。これに関しては、汎関数がパレ・スメールの条件を満たせば、峠の補題が成立する、ということが知られている。パレ・スメール条件を満たすことをチェックする事は、一般にそれ程容易ではないが、今の場合は既に研究代表者によって証明されている。また、２つの“安定臨界点”のペアは多く作れると予想され、それに伴い、多くの不安定閉キルヒホッフ弾性棒を構成できると考えられる。

(3) 研究の目的の(3)に対する方法について述べる。まずは、n=4 の時に、何らかの条件をおくことによって、常微分方程式を具体的に解き、第４ソリトン曲線の曲率と捩率の具体的な表示式を求める。

４．研究成果

(1) 一般の完備リーマン多様体内のキルヒホッフ弾性棒の方程式の初期値問題について考察し、任意の初期値に対して、大域解(実数全体で定義された解)が一意的に存在することを証明した。この結果から、長さ有限のキルヒホッフ弾性棒は、キルヒホッフ弾性棒であることを保ったまま、両側に、長さ無限大に一意的延長ができるということが分かる。

なお、キルヒホッフ弾性棒の方程式は、曲げと捩れの効果を考慮したエネルギーのオイラー・ラグランジュ方程式であり、非線形４階常微分方程式である。従って、初期値問題の局所解の存在は、ほぼ自明であると言って良いが、大域解の存在は決して自明な事ではないことを強調しておく。実際、自然な変分問題の解曲線であっても、大域解に延長できない場合もある、という事が知られている。例えば、平面内の 2-極小曲線 (2-エネルギーの制限付き変分問題の解)で、大域解に延長できないものが存在する、という事などが知られている。

なお、当初、キルヒホッフ弾性棒については、主に次の２つのことを研究目的としていた。すわなち、第一に、高次元空間形内において、できるだけ広いクラスのキルヒホッフ弾性棒の具体的な表示式を求め、その幾何学的性質を解明すること、第二に、３次元ユークリッド空間内の不安定な閉キルヒホッフ弾性棒を多く構成すること、であった。しかしながら、初期値問題の大域解の存在という、より根源的で重要な問題が未解決であったため、こちらの問題を先に研究することにした。その結果、完備リーマン多様体内という一般的な状況において、満足すべき結果を得ることができた。この結果は、雑誌論文①として発表した。

(2) ３次元ユークリッド空間内において、第４ソリトン曲線のある族をヤコビの楕円関数を用いて具体的に表し、この族の中に周期的なものが存在することを示した。これは回転トーラスに巻きつくような曲線となる。この周期的な第４ソリトン曲線を用いることにより、“空間曲線版変形 KdV 方程式”の周期的な合同解(形を変えずに動く解)を構成した。この結果は、ウィーンにおける国際研究集会において発表した(学会発表の①)。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① Satoshi Kawakubo, Extendability of Kirchhoff elastic rods in complete Riemannian manifolds, Journal of Mathematical Physics 55 (2014), 083525. 査読有.
DOI: 10.1063/1.4893356

② Satoshi Kawakubo, Kirchhoff elastic rods in five-dimensional space forms whose centerlines are not helices, Journal of Geometry and Physics 76 (2014), 158–168. 査読有.
DOI: 10.1016/j.geomphys.2013.10.020

③ Satoshi Kawakubo, Congruence solutions to the localized induction hierarchy in three-dimensional space forms, Osaka Journal of Mathematics 50 (2013), 921–945. 査読有.

④ Satoshi Kawakubo, Global solutions of the equation of the Kirchhoff elastic rod in space forms, Bulletin of the Australian Mathematical Society 88 (2013), 70–80. 査読有.
DOI: 10.1017/S0004972712000767

〔学会発表〕（計 7 件）

① Satoshi Kawakubo, Fourth soliton curves of the localized induction hierarchy, Transformations and Singularities (Vienna University of Technology, Vienna, Austria), 2014 年 9 月 16 日.

② 川久保 哲, 局所誘導階層の第４ソリトン曲線, 測地線及び関連する諸問題 (熊本大学, 熊本県熊本市), 2014 年 1 月 11 日.

③ 川久保 哲, 第４ソリトン曲線について, 2013 年度福岡大学微分幾何研究会 (福岡大学セミナーハウス, 福岡県福岡市), 2013 年 11 月 1 日.

④ Satoshi Kawakubo, Kirchhoff elastic rods of infinite length in a complete Riemannian manifold, The Fourth International Workshop on Differential Geometry (虹ノ松原ホテル, 佐賀県唐津市), 2013 年 3 月 25 日.

⑤ 川久保 哲, 完備 Riemann 多様体内の長さ無限大の Kirchhoff 弾性棒, 2012 年度福岡大学微分幾何研究会 (福岡大学セミナーハウス, 福岡県福岡市), 2012 年 11 月 1 日.

⑥ 川久保 哲, 高次元空間形内の Kirchhoff 弾性棒, 第 59 回幾何学シンポジウム (九州大学, 福岡県福岡市), 2012 年 8 月 30 日.

⑦ 川久保 哲, 高次元空間形内の Kirchhoff 弾性棒, 第１回室蘭連続講演会 (室蘭工業大学, 北海道室蘭市), 2012 年 1 月 11–13 日.

〔図書〕（計　　件）

〔その他〕
ホームページ等
http://resweb2.jhk.adm.fukuoka-u.ac.jp/FukuokaUnivHtml/info/4009/R108J.html

６．研究組織

(1)研究代表者
川久保 哲（KAWAKUBO, Satoshi）
福岡大学・理学部・助教
研究者番号：80360303

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：