

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 30 日現在

機関番号：32660

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540117

研究課題名(和文) インスタントンの変形量子化とそれに伴う位相不変量の非可換変形

研究課題名(英文) Deformation quantizations for instantons and related noncommutative deformations of topological invariants

研究代表者

佐古 彰史 (Sako, Akifumi)

東京理科大学・理学部・准教授

研究者番号：00424200

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：非可換等質ケーラー多様体上のゲージ理論について研究してきた。非可換多様体を構成するために、カラベゴフによって与えられているケーラー多様体に対する変数分離型の変形量子化を用いた。可換極限で通常のヤンミルズ理論に接続する非可換多様体上のゲージ理論のモデルを構成した。例として、初めに非可換複素射影空間と非可換複素双曲空間を構成し、その上のゲージ理論を構成した。理論を形式冪級数ではないものにするために、その多様体のフォック表現も与えられた。その表現を用いて、そのゲージ理論のオイラーラグランジュ方程式とBPS方程式(インスタントン型方程式を含む)を導出し、非自明な解を与えた。

研究成果の概要(英文)：Gauge theories on noncommutative homogeneous Kahler manifolds have been studied. To make the noncommutative manifolds, we used the deformation quantization with separation of variables for Kahler manifolds which was given by Karabegov. We constructed models of noncommutative gauge theories that are connected with usual Yang-Mills theories in the commutative limits. As examples, we gave noncommutative CP

研究分野：微分幾何

キーワード：非可換幾何 変形量子化 ゲージ理論 BPS方程式 インスタントン

1. 研究開始当初の背景

特性類や指数定理などを見てもわかるようにゲージ場のソリトン解であるインスタントンやモノポール等の微分位相幾何学への貢献は大きく、さらにそれらの量子論である Donaldson 理論や Seiberg-Witten 理論などが 4 次元多様体の位相不変量の構成に中心的な役割を果たしてきた。この経験からゲージ理論が非可換多様体の幾何学に対して大きな貢献を果たすことが期待されていた。実際、超対称性をもつゲージ理論の低エネルギー理論を非摂動的に完全に解いた Nekrasov-Okounkov の定理が証明される際に、非可換空間上に一度持ちあげて分配関数を計算するなど、従来と異なるアプローチや応用が次々と生み出されていた【佐古彰史, “超対称ゲージ理論と幾何学”, 日本評論社, 2007】。しかし当時は非可換幾何そのものに対して成果を上げているとまでは言えない状態で、本プロジェクトで最終的に目指すところは、一歩進んで非可換幾何を解析する武器を構成することであった。

本プロジェクトの主役である非可換空間上のインスタントンの研究は、Nekrasov と Schwarz が ADHM 構成法(Atiyah 等による ADHM データと呼ばれるある代数方程式の解からインスタントンを構成する方法)を非可換  $R^4$  へ拡張することで幕が落とされた【Nekrasov-Schwarz, Commun.Math.Phys. 198(1998)689】。その ADHM 構成法を用いたインスタントンの厳密解(ADHM インスタントン)がいくつか作られ【Sako, Ishikawa, Kuroki, JHEP11(2001)068 等】、それらを用いて ADHM インスタントンの定性的な解析が進んだ。例えば、局所的な曲率の積分であるインスタントン数(Pontryagin 数)と ADHM 構成法で現れるベクトル空間の次元が一致することを示し、非可換変形を特徴付ける非可換パラメータに依存せず整数値を取ることを明らかにした【Sako, JHEP04(2003)023, Sako, Ishikawa, Kuroki, JHEP08(2002)028】。この対応は可換な  $R^4$  上では周知の事実である。こうした解析から ADHM インスタントンに関しては理解がすすんでいた。しかし可換な場合と異なり ADHM データとインスタントンの間の 1 対 1 対応が証明されていない事、変形量子化の方法ではない構成法のため可換な空間でのインスタントンとの対応関係に不明な点がある事など、課題が残っていた。そこで我々は変形量子化の立場で、可換な空間におけるインスタントン解から滑らかに非可換変形した解を構成する方法を作り、その結果として非可換  $R^4$  上で曲率の積分で定義されるインスタントン数が変形されないことも示すことができた【Maed, Sako, J.Geom.Phys. 58 (2008) 1784】。こうして、 $R^4$  での理解が深まり、より一般の多様体への拡張が期待されるというのが、研究開始当初の背景である。

2. 研究の目的

背景で述べた通り非可換  $R^4$  のインスタントンに対しては相当理解が深まっており、ADHM 構成法と変形されるインスタントン解との関係を明らかにするなどを行い一応の完成をみるのが最初の目標である。さらに他の非可換多様体への一般化を行うことと、非可換空間上の量子位相不変量である位相的場の理論の構築への機が熟しており、それを行うことが本研究の目的である。

3. 研究の方法

従来から行ってきた研究分担者である前田吉昭氏(東北大学)との共同研究に加え、行列模型の専門家である鈴木俊哉氏(釧路高専)と梅津祐志氏(釧路高専)を共同研究者に加えた体制を構築し研究を進めた。研究の分担は、結果的にはあまり明確ではなく、議論を行いながら理論を形成していった。平時はメール等で議論したが、大学の長期休業時に、主に東京理科大と東北大学で 1 週間程度の出張を行い直接研究討議を行った。また、国際会議に参加した際に諸外国の専門家からも情報収集することで、有益な情報が得られ、大きく進展することもあった。

4. 研究成果

分担研究者である前田氏との共同研究で、このプロジェクトが始まる前の段階で変形量子化の立場で、可換な空間におけるインスタントン解から非可換変形した解を構成する方法が発見され、その結果として非可換  $R^4$  上で曲率の積分で定義されるインスタントン数が変形されないことも示されていた【Maeda, Sako, J.Geom.Phys. 58 (2008) 1784】。本プロジェクトでは、まずこのインスタントンを伴う Dirac 作用素に対する指数定理とグリーン関数も構成さし、これらを用いて  $N$  が 2 以上の  $U(N)$  ゲージ理論に対して ADHM データと非可換インスタントンとの 1 対 1 対応も証明することができた【Maeda, Sako, J.Math.Phys.53(2012) 022303】。これによって  $R^4$  に関しては一応の完成とし、引き続きより一般の場合に非可換多様体ゲージ理論の場合へと研究を進めた。

ところで、非可換幾何学には、よく知られている Connes らによる作用素環の方法の他に、本研究で用いられている変形量子化を用いる方法がある【前田, 佐古, 「幾何学の量子化」サイエンス社 2012 年】。これは  $C$  級関数の形式冪級数の代数に定義される積をスター積と呼ばれる積に変形することで結合的ではあるが非可換にする方法である。変形量子化の利点は、微分幾何学的手法を残したまま非可換幾何を構築できる点であるが、弱点として一般に対象が形式冪級数であることと、スター積の存在が保証されていても具体的表式が得られる計算可能な例が多くなかったことである。特に具体的なスター積が存在しないままでは、インスタントンは

おるか、そもそもゲージ理論が構築できるのかどうか分からないという状況である。しかし近年、Karabegov によって導入された変形量子化で非可換ケーラー多様体を構成する方法が発見された【Karabegov, Commun.Math.Phys. 180(1996)745】。その方法と多様体の対称性を用い、 $CP^N$ および $CH^N$ について完全に具体的なスター積を求めることに成功した【Sako, Suzuki, Umetsu, J.Math.Phys.53(2012) 073502】。また、さらに一般の局所対称空間に関する研究も現在進行中である。こうして計算可能な非可換ケーラー多様体を手に入れることに成功したので次にゲージ理論の構築を試みた。実際、非可換な等質ケーラー多様体においては、可換極限で通常のヤンミルズ理論を含むようなゲージ理論が構築された【Maeda, Sako, Suzuki, Umetsu, J.Math. Phys.55 (2014) 092301】。また、インスタントンなどのBPS方程式を議論するためには、形式冪級数のままでは正值性などが言えないこともあり難しい。したがって、構成されたスター積と対応が付くような代数表現を付けることで、有限な値をもつ理論を構築できる。これによってオイラーラグランジュ方程式やBPS方程式の導出などが、明確に可能になる。これについて、 $CP^N$ に限って実際に実行し、特に $CP^1$ と $CP^2$ に関してBPS方程式の導出を行い、実際に非自明解も求めてみることに成功している【Sako, Suzuki, Umetsu, J.Math.Phys. 56 (2015) 113506】。複素1次元(実2次元)多様体にも関わらず、ユークリッド空間の場合の3次元モノポール方程式が得られたり、複素2次元(実4次元)空間に対してユークリッド空間における8次元インスタントンに対応するBPS方程式が得られるなど非常に面白い展開を見せている。しかし、現在までのところ、これらを系統的に理解し解を構成する方法が得られるにはいたっていない。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12件)

1. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Gauge theories on noncommutative  $CP^N$  and BPS-like equations", Journal of Mathematical Physics 56 (2015) 113506, 1-12, DOI: 10.1063/1.4935548 (査読付)
2. Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Deformation Quantization with Separation of Variables and Gauge Theories", Geometric Methods in Physics. XXXIII Workshop 2014, Trends in Mathematics, (2015)135-144, DOI: 10.1007/978-3-319-18212-4\_9 (査読付)
3. Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Gauge theories on noncommutative Kähler manifolds", Journal of Physics: Conference Series 626 (2015) 012045, 1-9, DOI: 10.1088/1742-6596/626/1/012045 (査読付)
4. Y. Maeda, A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Gauge Theories in Noncommutative Homogeneous Kähler Manifolds", Journal of Mathematical Physics 55, 092301 (2014) 1-17, DOI: 10.1063/1.4893982 (査読付)
5. 佐古彰史 "非可換幾何学の考え方" 数理学 3月号 サイエンス社 2014年 34-39, ISBN: 4910054690347
6. A. Sako, "What Happen to Gauge Theories under Noncommutative Deformation?", Noncommutative Geometry and Physics, 3 (2013) 111-129, ISBN: 978-981-4425-00-1 (査読付)
7. Y. Maeda, A. Sako, "Deformation Quantization of Gauge Theory in  $R^4$  and U(1) Instanton Problems", Noncommutative Geometry and Physics 3 (2013) 471-483 ISBN: 9789814425001 (査読付)
8. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Noncommutative  $CP^N$  and  $CH^N$  and their physics", Journal of Physics: Conference Series 442 (2013) 012052, DOI: 10.1088/1742-6596/442/1/012052 (査読付)
9. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Noncommutative Deformations of  $CP^N$  and  $CH^N$ ", Proceedings of the 7th Mathematical Physics Meeting: Summer School and Conference on Modern Mathematical Physics, (2013) 305-320, ISBN:9788682441380(査読付)
10. Y. Maeda, A. Sako, "Noncommutative Deformation of Spinor Zero Mode and Atiyah-Drinfeld-Hitchin- Manin Construction", Journal of Mathematical Physics vol.53, 022303 (2012) 022303 -1-24, DOI: 10.1063/1.3679398 (査読付)
11. A. Sako, T. Suzuki, H. Umetsu, "Explicit Formulas for Noncommutative Deformations of  $CP^N$  and  $CH^N$ ", Journal of Mathematical Physics vol.53, 073502 (2012) 073502-1-16, DOI: 10.1063/1.4731236 (査読付)
12. Y. Maeda, A. Sako, "Deformation Quantization of Instantons on  $R^4$ ", Contemporary Mathematics 584 (2012) 39-63, ISBN 0821891448, 9780821891445 (査読付)

〔学会発表〕(計 16 件)

1. 佐古彰史, “Topological Field Theories and Gauged WZW model 1”, Koriyama Geometry and Physics Days 2016 “Painleve equations, integrable systems and moduli spaces”. 第一回: Geometry and integrable systems around the fusion algebra, 2016年2月7日, 日本大学(福島県郡山市)
2. 佐古彰史, “Topological Field Theories and Gauged WZW model 2” Koriyama Geometry and Physics Days 2016 “Painleve equations, integrable systems and moduli spaces”. 第一回: Geometry and integrable systems around the fusion algebra, 2016年2月8日, 日本大学(福島県郡山市)
3. A. Sako, “Fock representation of noncommutative Kahler manifolds and field theories” International Conference on Non-commutative Geometry and K-Theory, 2015年12月19日, 重慶(中国)
4. 佐古彰史 “非可換幾何学入門 ~ 数学的表現と現実の時空 ~”, 科学基礎論夏のセミナー-2015, 2015年9月23日, 北海道大学(北海道札幌市)
5. A. Sako, 講演 1 “Introduction to Noncommutative Geometry” Theoretical Particle Physics Group Seminar in Hokkaido University, 2015年6月26日, 北海道大学(北海道札幌市)
6. A. Sako, “Noncommutative Gauge Theories on  $CP^N$ ”, Theoretical Particle Physics Group Seminar in Hokkaido University, 2015年6月26日, 北海道大学(北海道札幌市)
7. 佐古彰史, 鈴木俊哉, 梅津裕志: “非可換等質ケーラー多様体上のゲージ理論の性質”, 日本数学会 2015 年度年会, 2015年3月23日, 明治大学(東京都)
8. A. Sako, “Some physics of noncommutative gauge theories on Kahler manifolds”, Workshop on Strings, Membranes and Topological Field Theory (TFC Program 2015: Fundamental Problems in Quantum Physics: Strings, Black Holes and Quantum Information), Tohoku University, 2015年3月7日, Tohoku University, (宮城県仙台市)
9. A. Sako, “Gauge theory in noncommutative Kahler manifolds”, Seventh International Workshop DICE2014, 2014年9月17日, Castello Pasquini / Castiglioncello (Italy)
10. A. Sako “Deformation Quantization of Gauge theories with Separation of Variables”, XXXIII Workshop on Geometric Methods in Physics, 2014年7月3日,

Bialowieza (Poland)

11. 佐古彰史, “等質ケーラー多様体上のゲージ理論の変形量子化”, 非可換幾何湯谷研究集会, 2013年11月27日, 湯の風 H A Z U (愛知県新城市)
12. 佐古彰史, “幾何学の量子化のいくつかの話題”, 神楽坂幾何セミナー, 2013年4月20日, 東京理科大学(東京都)
13. 佐古彰史 “Noncommutative  $CP^N$  and  $CH^N$  and their physics”, Sixth International Workshop DICE2012, 2012年9月19日 Castello Pasquini / Castiglioncello (Italy)
14. 佐古彰史, 鈴木俊哉, 梅津裕志: “ $CP^N$  と  $CH^N$  の変形量子化” 日本数学会 2012 年度年会, 2012年3月28日, 東京理科大(東京都)
15. 佐古彰史 “超対称ゲージ理論の非摂動的効果とその関連幾何学への入門” 近畿大学集中講義, 2011年8月24日~26日, 近畿大学(大阪府大阪市)
16. A. Sako, “Part1: Deformation quantization of  $U(N)$  Instantons in  $R^4$ , Part2: Deformation quantization of vortices in Kahler manifolds” Mathématique séminaires Liege University, 2011年8月8日, Liege (Belgium)

〔図書〕(計 1 件)

1. 前田吉昭 佐古彰史: 「幾何学の量子化」(サイエンス社 SGC ライブラリ 95 2012年)全 228p

〔産業財産権〕

- 出願状況(計 0 件)  
取得状況(計 0 件)

〔その他〕

東京理科大学ホームページ | 佐古彰史 | 論文著書学会発表  
[http://www.tus.ac.jp/fac\\_grad/p/achievement.php?67cc](http://www.tus.ac.jp/fac_grad/p/achievement.php?67cc)

佐古彰史ホームページ

<http://hb2.seikyoku.ne.jp/home/sako/index.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐古 彰史 (SAKO Akifumi)  
東京理科大学理学部第二部数学科・准教授  
研究者番号: 00424200

(2) 研究分担者

前田 吉昭 (MAEDA Yoshiaki)  
東北大学知の創出センター・教授  
研究者番号: 40101076