様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ４ 月 ２３ 日現在

機関番号：１２５０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2014
課題番号：２３５４０１２２

研究課題名（和文）非平衡無限粒子系の解析

研究課題名（英文）Stochastic analysis of infinite particle systems in nonequilibruim

研究代表者
種村　秀紀（TANEMURA, Hideki）

千葉大学・理学（系）研究科（研究院）・教授

研究者番号：４０２１７１６２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,700,000円

研究成果の概要（和文）：　相互作用を持つ無限粒子系を表す無限次元確率微分方程式(ISDE)の解の存在と一意性の研究を行い、一意性と末尾シグマ加法族との関係を明らかにした。この結果を応用することで、ランダム行列理論で研究されている無限ダイソン模型、無限エアリー模型、無限ベッセル模型などを含む長距離相互作用をもつ干渉ブラウン運動系を表すISDE の解の強解の一意性が導き、対応するが、ディリクレ形式を決定した。

研究成果の概要（英文）：We study existence and uniqueness of infinite dimensional stochastic differential equations (ISDEs). We clarified the relation between the uniqueness of solutions and the triviality of tail sigma fields. Applying the result, we obtained the uniqueness of strong solutions of ISDEs describing the systems of Brownian motions with long range interaction including logarithmic potential, and determined the Dirichlet forms associated with the systems.

研究分野：確率論

キーワード：行列式過程　確率微分方程式　ダイソン模型　エアリー過程　ランダム行列　ディリクレ形式　末尾シグマ加法族　非平衡系

１．研究開始当初の背景

多粒子の運動を表す確率過程の研究は、確率論の中心的主題の1つであり、20世紀前半から盛んに行われてきている。そして、様々な分野（物理学、生物学、経済学、工学）で応用されており、これまでに多大な影響を与えてきている。複数の粒子の系を扱うとき、粒子間に相互作用がなければ、独立の確率過程を粒子の数だけ並べることによりその系は構成され、系の性質も個々の粒子の性質から比較的簡単に導くことができる。しかし、粒子間に相互作用がある場合、とくに無限個の粒子系では、系を記述する確率過程を構成することから一般には簡単ではない。例えば、ブラウン剛体球の系は、短距離相互作用であるにも関わらず、粒子数が無限である場合、系を記述する確率過程の構成は簡単ではなく、その系が実現する粒子配置の全体、つまり状態空間についても詳しいことは分かっていない。長距離相互作用である場合は、さらに難しく、系を記述する確率過程の構成もほとんどの場合未解決である。

２．研究の目的

本研究課題では、長距離相互作用を持つ無限粒子系についての研究を目的にしている。未来永劫衝突しないという条件の下での複数の1次元ブラウン運動の系は、距離の逆数の大きさで反発する、つまり対数ポテンシャルを相互作用とする系である。この系は、ブラウン運動を成分とするユニタリー行列過程の固有値と等価であり、また A(N) 型ワイル領域内の吸収壁ブラウン運動の優調和変換になっており、ランダム行列理論、確率論において重要な確率過程のひとつである。そして、ダイソンのブラウン運動模型と呼ばれるもので、特にパラメータ ベータが２の場合に対応する。この系においてバルクスケーリング、ソフトエッジスケーリングに従って粒子の数を無限大にしたとき、収束先は長距離相互作用を持つ無限粒子系となり、それぞれ無限ダイソン模型、無限エアリー模型と呼ばれている。申請者は、連携研究者である香取眞理氏との共同研究により、非平衡状態の場合を含むかなり一般の初期値に対して、無限ダイソン模型、無限エアリー模型を構成できることを示した。これらの無限粒子系はそれぞれ正弦核、エアリー核に対応する行列値点過程（または、フェルミオン点過程）を平衡分布としてもつが、正弦関数、エアリー関数の各零点に１粒子が置かれた配置を初期値としたとき、時刻無限大での平衡分布への収束すること、つまり緩衝現象も証明してある。本研究課題の目的は、これらの長距離相互作用を持つ無限粒子系に対して

(1) マルコフ性および強マルコフ性、

(2) 系がみたす無限次元確率微分方程式(ISDE)の決定と解析、

(3) 平衡状態に収束する初期値の特徴付け、

を調べることである。

無限格子上の非対称排他過程において、原点を越えた粒子の個数の確率法則が適当なスケーリングの下でどうなるかは,時刻０において原点より左側の格子のみに粒子が詰まっているという特別な場合に、Johansson(2000)によりランダム行列の最大固有値と関係している事を用いて示された。連携研究者の笹本氏は、別の方法により同じ結果を再現し、さらにその他の様々な初期粒子配位に拡張できる事を示した。これら結果は、ランダム行列と関係を通じて非衝突過程と対応しており、極限で導かれる確率分布は、無限エアリー模型の分布と深く結びついている。非対称排他過程に関する彼らの結果を一般の初期値に対して拡張することも本研究課題の研究目的の1つである。さらに、Stochastic Burgers 方程式、KPZ 方程式 への研究への発展も視野に入れている。

３．研究の方法

長距離相互作用をもつ無限粒子系を記述する確率微分方程式の構成は、長田博文氏（九

州大学理学研究院）によりディリクレ形式理論を使って平衡分布に依存して定まる初期値空間に対して示されている。（H. Osada : PTRF 2012）。正弦核をもつ行列値点過程に対応する無限粒子系がみたすISDEは、その中で例の一つとして与えられている。無限ダイソン模型がみたすISDEの決定は、その系と一致示すことにより示すことができる。また、無限エアリー模型に対しても、エアリー核をもつ行列値点過程に対応する無限粒子系がみたすISDEを導き、その系と一致することを示すことによりISDEを決定することができる。系の一致を示すためには、ISDEの解の一意性が重要な鍵となる。また、マルコフ性、強マルコフ性を示すには、確率過程に初期値に関する連続性が鍵となるが、そのためには道の挙動の評価が必要となる。そのためにこれまでの研究で得られた行列式表現を巧みに使うことが有効である。

非対称排他過程において、原点を越えた粒子の個数の漸近挙動を一般の初期値に対して拡張するには、近年盛んに研究されている非対称排他過程の原点でのカレントに関する収束定理を理解するとともに、一般化に向けての準備を行う。さらに、この分野の第一人者である笹本氏と議論をすることにより計画を遂行する。

４．研究成果

⑴　これまでの研究では、ある確率過程が行列式過程であることを調べる場合、直交多項式またはその拡張の２重直交多項式が用いられていた。当該年度の研究では、複素ブラウン運動表現という確率論的な新しい表現法を導入し、非衝突ブラウン運動が複素ブラウン運動表現を持つことを示すことから行列値過程であることを導いた。（香取眞理氏との共同研究）この表現は、非衝突ブラウン運動において適当な条件の下で粒子数を無限大にして得られる無限ダイソン模型に対しても適用することができ、これまで未解決であった、極限確率過程の非衝突性、連続性などを示すことができたため、極限確率過程が無限非衝突連続過程であることが導かれた。（*Elect. Comm. in Probab.*, **18**, (2013) に掲載）

⑵ 相関関数が（四元数）行列式で表現される確率分布を（四元数）行列値点過程、多時刻相関関数が行列式で表現される確率過程を行列式過程とよぶことにする。拡張された正弦核を持つ行列値過程、拡張されたベッセル核をもつ行列値過程、拡張されたエアリー核をもつ行列値過程がそれぞれ、無限ダイソン模型、無限エアリー模型、無限ベッセル模型である。これらは、1990年代後半から盛んに研究されていたが、そのマルコフ性は示されていなかった。香取眞理氏との共同研究によりこれら３つの行列値過程のマルコフ性を証明すること成功した。（*Markov processes and related fields* **17**, (2011) に掲載）

⑶ 前述の結果を発展させ、強マルコフ性を示した。（長田博文氏（九州大学）との共同研究）この結果により、半群、生成作用素を用いた解析的アプローチができるようになる。さらに、ディリクレ形式理論の適用も可能になったため、行列値過程の確率解析が大きく発展した。その一つとして、無限次元確率微分方程式との対応が明らかになったことは、重要な成果である。無限エアリー模型に対応する無限次元確率微分方程式の決定は、この行列値過程が導入された当初からの問題であったが、構成の方法が特殊であったためか、長い間示すことができなかった。確率微分方程式が決定したことにより、伊藤の公式などの確率解析の手法を用いることができるようになり、たとえば、無限個の粒子のなかの有限個の粒子に着目したときに、これらの道の正則性、ブラウン運動との絶対連続性など、いままでのいくつかの予想を証明することができた。（2013年度日本数学会総合分科会、

12th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systemにて講演）

⑷ エアリー核をもつ（四元数）行列式点過程は、パラメータをベータとする１次元上の無限個の粒子配置空間上の測度である。ただし、ベータは１，２，４の３通りの値をとる。長田博文氏との共同研究により、ディリクレ形式理論を適用し、エアリー核をもつ（四元数）行列式点過程を平衡分布にもつ拡散過程を構成し、さらに、それらがみたす無限次元確率微分方程式を決定し、その一意性も示した。無限エアリー模型は、ベータが 2 のエアリー核を相関核とする行列式点過程を平衡分布とする無限次元確率過程であり、Prahofer-Spohn, Johansson 等によって2000年代初めに導入され、その後、盛んに研究されている。ISDEの一意性により、ディリクレ形式理論を適用して構成した上述の確率過程と無限エアリー模型の一致を示した。（2014年度日本数学会総合分科会にて講演, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **90** , (2014) に掲載）

（５）相互作用を持つ無限粒子系を表すISDEの強解の存在と一意性の研究を行い、長田博文氏との共同研究により、一意性と末尾シグマ加法族との関係を明らかにした。この結果を応用することで、長距離相互作用をもつ干渉ブラウン運動系を表すISDE の解の強解の一意性がしめされた。（2014年度日本数学会総合分科会にて講演, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **90** , (2014) に掲載）

以上の結果は、長年の未解決問題を解決したものであり、国際的評価が高い。特に、（５）でのISDEの強解の存在と一意性での証明での本質的なアイデアは、広範囲の無限次元確率（偏）微分方程式、マルチンゲール問題の解の存在と一意性にも適用が可能であり、この分野での研究者に大きな影響を与えることは明らかである。

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕（計　４件）

① Hirofumi Osada, Hideki Tanemura, Cores of Dirichlet forms related to random matrix theory, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, **90** , (2014), 145--150. 査読有

② Makoto Katori, HIdeki Tanemura, Complex Brownian motion representation of the Dyson model, *Elect. Comm. in Probab.*, **18**, (2013), 1--16. 査読有
DOI 10.1214/ECP.v18-2554

③ Makoto Katori, HIdeki Tanemura, Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels, *Markov processes and related fields*, **17**, (2011), 541--580. 査読有

④ Makoto Katori, HIdeki Tanemura, Noncolliding processes, Matrix-valued process and determinatal processes, *SUGAKU EXPOSITIONS*, **24**, (2011), 263--289. 査読有

〔学会発表〕（計１１件）

① 種村　秀紀, 末尾sigma-加法族と無限次元確率微分方程式の強解の存在と一意性, 2014 年度日本数学会総合分科会，2014 年 9 月 25 日，広島大学（広島県・東広島）．

② 種村　秀紀, Airy random point field に対する無限次元確率微分方程式, 2014年度日本数学会総合分科会，2014年9月25日，広島大学（広島県・東広島）．

③ 種村　秀紀, Strong Markov property of determinantal processes associated with extended kernels, 12th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting System，2013年11月22日，東京

大学大学院数理科学研究科（東京都・東京）．

④ 種村 秀紀, Strong Markov property of determinantal processes, 2013年度日本数学会総合分科会，2013年9月24日，愛媛大学（愛媛県・松山）．

⑤ 種村 秀紀, Complex Brownian motion representation of non-colliding diffusion processes, 2013年度日本数学会総合分科会，2013年9月24日，愛媛大学（愛媛県・松山）．

⑥ 種村 秀紀, Strong Markov property of determinantal processes, 36th Conference on Stochastic Processes and Their Applcations, 2013 年 8 月 2 日, ボルダー（アメリカ）.

⑦ 種村 秀紀, Stochastic differential equations associated with infinite particles with long ranged interaction, 8th World Congress in Probability and Statistics, 2012年7月13日，イスタンブール（トルコ）.

⑧ 種村 秀紀, Stochastic differential equations related to soft-edge scaling limit , Interacting particle systems, growth models and random matrices, 2012年3月20日，Warwick（イギリス）．

⑨ 種村 秀紀, Stochastic differential equations related to soft-edge scaling limits, 数理物理と確率解析，2012年3月13日，湘南国際村センター（神奈川県・葉山）．

⑩ 種村 秀紀, Infinite Particle Systems associated with Airy kernel, 10th Workshop on Stochastic Analysis on Large Scale Interacting System，2011年12月6日，高知大学 朝倉キャンパス（高知県・高知）．

⑪ 種村 秀紀, Determinantal Processes and Entire Functions , Quantum and classical random processes, 2011年5月20日-26日，Benasque（スペイン）．

〔その他〕
ホームページ等
http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/~tanemura/

６．研究組織
(1)研究代表者
種村 秀紀（Tanemura Hideki ）
千葉大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：４０２１７１６２

(3)連携研究者
香取 眞理（Katori Makoto ）
中央大学・理工学部・教授
研究者番号：６０２０２０１６

笹本 智弘（Sasamoto Tomohiro ）
東京工業大学大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：７０３３２６４０