様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ９ 日現在

機関番号：１２６１２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１２７

研究課題名（和文）無限領域における波動問題に対する有限要素法に関する研究とソフトウェア開発

研究課題名（英文）Study on finite element methods for wave problems in unbounded domains and development of associated FEM softwares

研究代表者
小山　大介（Koyama, Daisuke）

電気通信大学・情報理工学（系）研究科・助教

研究者番号：６０２５１７０８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,700,000円、（間接経費）　　510,000円

研究成果の概要（和文）：海洋構造物の建設や高性能ソナーの開発には波動現象の数値シミュレーションが欠かせない．本研究では，有限要素法と呼ばれる方法を用いたあるシミュレーション技法が妥当であることを数学的に証明した．さらに，シミュレーション時間を短縮させるために，そのシミュレーションで用いるパラメータの最適な値を求める研究を行い．特定のシミュレーションには効果があることが分かった．地震の数値シミュレーションなどを行うための不連続ガレルキン有限要素法と呼ばれる新たなシミュレーション技法の妥当性を数学的に保障するために必要となるコルンの不等式と呼ばれる不等式を証明した．

研究成果の概要（英文）：We need numerical simulations for construction of ocean structures and for development of high-performance sonar. First we mathematically established the validity of a simulation technique using the method called "finite element method." Next we obtained an optimal parameter which is used in the numerical simulation to speed up the simulations. We observed that the optimal parameter is effective for specific problems. Finally we mathematically proved the inequality called "Korn's inequality", which plays an essential role in analysis for validating a new simulation technique called "Hybridized discontinuous Galerkin finite element method" which will be used in numerical simulations of seismic waves, etc.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：領域分割法　最適化シュワルツ法　不連続ガレルキン有限要素法　波動問題　平面弾性問題　コルンの不等式　外部問題

１．研究開始当初の背景

(1) マグロなどの海洋資源調査に用いるソナーの性能向上や海洋構造物の建設には，物体（マグロ，海洋構造物）まわりの波動現象の数値シミュレーションが欠かせない．この波動現象は，物体まわりの媒質が無限に広がっているとして，無限領域における偏微分方程式の境界値問題として，モデル化されることが多い．

このような無限領域における境界値問題に対する数値計算法として，物体を囲む人工境界を導入し，その上で適当な境界条件を課し，元の問題を物体の境界と人工境界によって囲まれる有限領域における問題に帰着させ，有限要素法で近似的に解くという方法が知られている．人工境界上で課す境界条件として，Dirichlet-to-Neumann 作用素（DtN 作用素）によって表される境界条件（DtN 境界条件と呼ぶ）を選んだ時，この方法は DtN 有限要素法と呼ばれる．

DtN 有限要素法は，30 年あまり前にフィックスらによって水中音響問題に初めて適用され，以来，様々な問題への適用がなされてきたが，その妥当性が数値実験による確認のみで，事前誤差評価を証明するなど数学的にその妥当性が示されていない問題も多く，DtN 有限要素法のさらなる理論的基盤整備が必要であった．

(2) 2004 年，多重散乱問題に対して，グローテらによって，複数の物体の各々を囲む複数の人工境界を導入し，各物体の境界とそれを囲む人工境界とによって囲まれる有限領域を考え，元の問題をそれらの有限領域の和集合における問題に帰着させる発展的な DtN 有限要素法が提案された．（以後，この方法のことを多重 DtN 有限要素法と呼ぶことにする．）多重 DtN 有限要素法に対してもその妥当性が数値実験によって示されるのみであり，数学的な妥当性の証明は無かった．

(3) 本研究者は，多重散乱問題に対する多重 DtN 有限要素法においては，元の非有界領域（複数散乱体の外部領域)が，(2)で述べた複数の有界領域と残りの非有界領域に領域分割されていることに注目し，この領域分割に基づく並列シュワルツ法を提案し，その方法の収束性を数学的に証明し，数値計算により，妥当な数値解が得られることを確認していた．しかしながら，その収束は非常に遅く，その提案方法は有効な方法であると言える状況では無かった．収束を速くする一つの方法として，ガンダーによる最適化シュワルツ法と呼ばれる方法が知られていた．この方法では，シュワルツの方法の収束を加速するために，部分領域間の接合境界で課されるロバン伝達境界条件や高次伝達境界条件に現れる複素パラメータを最適化する．ガンダーによる研究では，その接合境界は直線の場合のみが考察されていた．

(4) 不連続ガレルキン法の研究が盛んに行われていた. 国内では, 菊地・及川らによって，ハイブリッド型不連続ガレルキン有限要素法の研究が行われ，ラプラス方程式に対しては，その妥当性が数学的に証明されていた．

２．研究の目的

(1) 事前誤差評価式を導出し，数学的に DtN 有限要素法の妥当性が示されていない問題に対して, DtN 有限要素法の妥当性を数学的に保証することを目標とする．その事前誤差評価に関しては, DtN 境界条件を表す無限級数の打ち切りによる誤差と有限要素法の離散化による誤差を同時に評価する評価式を導出することを目指す.

(2) 多重散乱問題に対し，DtN 有限要素法を並列化することによって得られる新たな並列計算アルゴリズムの開発し，多重散乱問題に対する DtN 有限要素計算の高速化を目指す.

(3) 高精度の計算手法である DtN 有限要素法をより多くの人に使用してもらうために，DtN 有限要素法の MATLAB によるソフトウェアを作成する．作成するソフトウェアは，音波, 水の波, 弾性波の各波動問題の 2 次元・3 次元問題や多重散乱問題に対応できるように作成することを目指す．多重散乱問題に対しては, (2)で開発した並列計算手法によって計算することを目指す.

(4) 上記(1)－(3)の結果を本にまとめる．DtN 有限要素法という高精度の方法をより広く使用してもらい，波動に関する諸問題の解決に本研究での成果を役立たせるために，上記(1)－(3)で得られた事前誤差評価, 並列計算手法，ソフトウェアを 1 冊の本に包括的にまとめて出版することを目指す.

(5) 以上 4 点によって，自然科学・工学に現れる波動問題を解決するための数値的手法の基盤整備の一端を担うことを目的とする．

３．研究の方法

(1) (a) 線形水波散乱問題に対する多重 DtN 有限要素法の事前誤差評価を導出するためには, DtN 作用素がハンケル関数と修正ベッセル関数で表されることから，これらの特殊関数の性質を新たに証明することによって，DtN 境界条件を表す無限級数の打ち切り誤差を評価した．また，線形水波散乱問題は正定値性を持たないので，有限要素法による離散化誤差を評価するためには，広く知られているシャッツの方法を用いた.

(b) 音響多重散乱問題に対するDtN有限要素法の事前誤差評価を導出するためには，多重DtN 境界条件が課された有界領域での問題が非対称問題になるために,本研究者が2010年に出したその共役問題の解の正則性に関する結果を用いて，(a)で述べたシャッツの方法を用いて証明をした．

(2) 円外ヘルムホルツ問題に対する並列シュワルツ法の収束を速めるために，部分領域間の接合境界で課すロバン境界条件の純虚数パラメータに関する最適化問題を定式化し，その問題を解析的に解き，最適パラメータを得た．最適化問題の解析解を与える証明において，ニコルソンの公式が本質的な役割を果たしている．さらに，ハンケル関数や修正ベッセル関数の対数微分に関する性質も新たに証明し，それらも用いた．

(3) ハイブリッド型不連続ガレルキン有限要素法に付随するコルンの不等式を証明するために，ブレナーが区分 H^1 関数に対するコルンの不等式を導出した際に用いた方法に沿って，数値的トレース変数の取り扱いについて工夫を施し，さらに，菊地が2012年に導出した数値的トレース変数に関する近似能力に関する結果等を用いた．このコルンの不等式を用いることによって，平面弾性問題へ適用したハイブリッド型不連続ガレルキン有限要素法の事前誤差評価を導出した．

４．研究成果

(1) 線形水波散乱問題および音響多重散乱問題に対するDtN有限要素法の事前誤差評価を導出した．線形水波散乱問題に対する DtN 有限要素法の事前誤差評価を導出することにより，DtN 有限要素法の信頼性をさらに強化できたことは意義深い．また，DtN 境界条件を表す無限級数の打ち切り誤差を評価するために，ハンケル関数と修正ベッセル関数の性質を新たに証明したことには学術的には意義がある．

本研究では，音響多重散乱問題に対する多重DtN有限要素法の事前誤差評価ことによって，初めて，多重DtN有限要素法の妥当性を数学的に示したという点で，先駆的な研究を成し遂げることができたと考えている．

(2) 円外ヘルムホルツ問題に対する重なりの無い領域分割に基づく並列シュワルツ法の収束を速めるために，部分領域間の円周接合境界で課すロバン境界条件の純虚数パラメータに関する最適化問題を定式化し，その問題を解析的に解き，最適純虚数パラメータを与えた．この最適化された純虚数パラメータは，低周波モードには有効であるが，高周波モードには有効でない．このため，このパラメータの実用性はあまり無いことが分かった．

複素数パラメータに関する最適化については，最適な複素数パラメータの存在は証明できたが，それを解析的に与えるには至らなかった．数値的にその最適パラメータを求め，有効な数値実験結果を得た．より効率的に最適化複素数パラメータを求める手段を開発することが必要であり，今後の課題としたい．

上述のように，円周境界上で課されたロバン伝達条件の最適な純虚数パラメータを解析的に与えたことは，この分野では非常にインパクトが強いものと考える．なぜなら，これまでは，直線境界上で課されたロバン伝達条件の係数の最適化に関する研究のみで，円周境界の場合の研究は行われていなかったからである．この一つの原因は，直線境界の場合には，DtN 作用素の固有値が平方根を使って表されるが，円周境界の場合には，ハンケル関数によって表され，ハンケル関数の取り扱いは平方根関数よりも難しかったからであると思われる．本研究では，最適純虚数パラメータに関する解析を行う過程において，いくつかのハンケル関数の性質を新たに明らかにした．この結果は，円周境界の場合の複素数パラメータの最適化の研究に役立ち，さらに，3 次元問題を解く際の球面境界の場合の研究にも役立つ．本研究は，最適化シュワルツ法の研究を一段階上に推し進めたという点で非常に意義深いものと考える．

(3) ハイブリッド型不連続ガレルキン有限要素法に付随するコルンの方程式を証明し，この方法の平面弾性問題への適用した際に得られる近似解に対する事前誤差評価を導出した．当初計画していた弾性波動問題に対するDtN有限要素法の事前誤差評価の導出はできなかったが，本研究で証明したコルンの不等式を用いて，さらに発展的なDtN境界条件が課された弾性波動方程式に対するハイブリッド型不連続ガレルキン有限要素法の事前誤差評価を導出することができるものと考えている．

(4) 以上の結果はいずれも偏微分方程式の数値解法，特に領域分割法や不連続ガレルキン法に関する基礎的研究結果であり，今後この研究結果を基礎にして，より有効な数値解法の開発を数学的品質保証付きで進めることができることと考えられる．この観点から，本研究での成果は重要であり，意義深いものと考えられる．また，当初計画していた並列計算による計算効率等の考察やDtN有限要素法のソフトウェア開発はできなかったが，これは，その数値解法の基礎的な部分での数理解析が予想以上に難しかったためである．しかしながら，その難解な基礎部分を少しでも解決できたことには大きな意義があると考える．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者に

は下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）
① Fumio Kikuchi and Daisuke Koyama, Strong L^p convergence associated with Rellich-type discrete compactness for ciscontinuous Galerkin FEM, JSIAM Letters, 査読有, Vol. 6, 2014 （掲載確定）

② Daisuke Koyama, An a priori error estimate of the Dirichlet-to-Neumann finite element method for multiple scattering problems, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, 査読有, Vol. 31, 2014, pp.165-192. DOI 10.1007/s13160-013-0129-x

③ 小山大介, 瀬戸秀幸, 停留した物体による線形水波散乱問題に対する DtN 有限要素法の誤差解析, 日本応用数理学会論文誌, 査読有, 22 巻, 2012, 341-382

〔学会発表〕（計　5　件）
① 小山大介, 菊地文雄, 平面弾性問題に対するリフティング項付きハイブリッド型 DGFEM, 第 10 回　日本応用数理学会　研究部会連合発表会　科学技術計算と数値解析　研究部会, 2014 年 03 月 19 日～2014 年 03 月 20 日, 京都大学吉田キャンパス

② 小山大介, 円外領域における Helmholtz 問題に対する最適化 Schwarz 法, RIMS 研究集会「応用数理と計算科学における理論と応用の融合」, 2013 年 10 月 15 日～2013 年 10 月 17 日, 京都大学数理解析研究所

③ Daisuke Koyama and Fumio Kikuchi, Korn's inequality for a hybridized discontinuous Galerkin FEM with lifting operator, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会 応用数学分科会, 2013 年 09 月 24 日～2013 年 09 月 27 日, 愛媛大学

④ Daisuke Koyama, An optimized Schwarz method for exterior Helmholtz problems, 22nd International Conference on Domain Decomposition Methods (DD22), 2013 年 09 月 16 日～2013 年 09 月 20 日, Universita della Svizzera italiana - Lugano, Switzerland

⑤ 小山大介, An optimized Schwarz method for acoustic radiation problems, 日本数学会, 2012 年 09 月 21 日～2012 年 09 月 21 日, 九州大学伊都キャンパス

６．研究組織
(1)研究代表者
小山　大介（KOYAMA, Daisuke）
電気通信大学・大学院情報理工学研究科・助教
研究者番号：60251708