

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540129

研究課題名(和文) 誤差移入のランダム性を考慮した動的システムの構造解析と保存系数値解法への新展開

研究課題名(英文) Analysis of Dynamical Structure by Considering the Randomness of Insertion of Errors and Development for Numerical Analysis on Conservative System

研究代表者

畑上 到 (Hataue, Itaru)

金沢大学・電子情報学系・教授

研究者番号：50218476

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：本研究ではランダムな誤差が移入した場合に数値シミュレーションの結果にどのような影響を及ぼすかについて主に数値実験を行いながら考察した。対象系は流体方程式である。このうち保存系ではその構造不安定性のために平均的な統計量を得ることが難しいが、本研究では静止している衝撃波がランダムネスにより振動する現象に着目して解析した。その結果ランダムな誤差移入により平均的な衝撃波の位置は定常衝撃波の位置より風下側にずれることがわかった。また散逸系では、ランダムネスが数値解の分岐過程に大きく影響を与えることも示された。これらの結果は誤差による解の信頼性への影響に対する有意義な情報を与えるものと思われる。

研究成果の概要(英文)：In this research, we considered the dependence of the numerical simulation result on inserted randomness. We adopted compressible fluid equations as calculation models. It is difficult to apply the statistical approach to the conservative system because it is structurally unstable. We calculated the statistical data of position of fluctuating shock wave induced by the forcibly added randomness in order to investigate the dependence of simulation results on the random errors. When the amplitude of randomness becomes relatively large, it is clarified that the mean position of shock wave moves toward leeward region. On the other hand, we showed that the forcibly added randomness affects the bifurcation process in the case of dissipative system. These results obtained in the present research give researchers significant information about the dependence of reliability of numerical results on random errors.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：ランダムネス 誤差移入 オイラー方程式 ナヴィエーストークス方程式 数値実験 確率モデル

1. 研究開始当初の背景

次世代スーパーコンピュータ等に代表される近年の高パフォーマンス大型計算機の急速な発達により、解析解を求めることが困難な問題に対して直接シミュレーションによる解析は不可欠なものとなっている。しかしながら、数値解が元の微分方程式の離散化の結果得られるものであることによることから、真の解と異なる解(幻影解)を得てしまう恐れがある。本研究者は、このことに対する決定論に基づく解析手法を開発、適用して、幻影解の性質を明らかにしてきた。一方、数値計算の解の信頼性を左右している誤差の移入に対しては、「精度保証計算」といったアプローチも活発に研究されているが、実用の数値計算においてはまだ不十分であり、本研究者は誤差に敏感な現象の再現を確率論的なアプローチによる統計量の平均挙動の解析を行うことで解析する手法を提案した。この手法を散逸系の微分方程式を離散化した差分方程式の解に対して適用することにより、ランダム項により解の平均挙動に構造的な変化が生じることを示し、数値シミュレーションを行う研究者への重要な提言を行った。

以上の背景と研究成果をふまえ、本研究者は、それらの方法論を実際の流体方程式に適用し、ランダムな誤差移入の数値シミュレーションの結果への影響を具体的に調べることが必要不可欠であると判断した。特に構造不安定性をもつ保存系へも適用し解析することで、数値解の信頼性に対して新たな指針が得られるであろうとの着想に至った。

2. 研究の目的

本研究では、非線型微分方程式の数値解を求める上で近似された離散力学系に対して、ランダムな誤差が数値解の構造に与える影響について数値実験を用いて考察する。特にその平均的な挙動を追跡することにより、ランダムネスの大きさやもとの方程式に含まれるパラメータによる分岐過程等について考察する。さらに保存系方程式であるオイラー方程式等に代表される大規模で複雑な保存系の問題への信頼できる有効な方法論の確立を目的として、これらの基礎的な解析とそれをもとにした高精度数値シミュレーションを行い、ランダムネスが数値解の構造に与える要因について可視化しながら議論する。まず、これまでの研究で検証したランダムな誤差が実際の離散動的システムの構造に与える影響について数値実験を通して提言を与えることを試みる。まず比較的簡単なロトカーボルテラ方程式に対して、ランダムネスが加わった場合の数値解の平均的構造に対してランダムネスの大きさが分岐のパラメータになり得るかどうかについて議論する。さらに、ナビエーストークス方程式の数値シミュレーションに対して、レイノルズ数が変化した場合に生じる分岐現象に対

してランダムネスがどのような影響を与えるかについて機論する。さらに圧縮性流れのオイラー方程式を TVD 法を適用して解く場合に、ランダムネスにより定性的な解の構造がどのように変化するかについて議論する。着眼点としては、ランダムネスがある種の数値解の構造不安定性に対するパラメータになりうるかどうかをあきらかにし、またそれが数値シミュレーションの結果にどのような形で現れるかを可視化することである。さらに本来誤差の性質が一樣であるかどうか、という問題の解決を試みる。

3. 研究の方法

それぞれの基礎研究の役割の上に、確率論的な立場からの基礎研究については、研究代表者の畑上と確率論を専門とする分担者の税所によって提案された Sample Mean Dynamical System (以下、SMDS と記す) の概念を離散動的システムに適用する。特にランダムネスの大きさがこの SMDS の構造において分岐過程のパラメータになり得るかについて共同で多角的に議論する。この研究と平行して、移入する誤差が流体シミュレーションにおける数値解の構造にどのような影響を与えるかについて数値計算を行う。この中で、現実の流体の問題におけるレイノルズ数をパラメータとして現れる分岐過程がランダムネスの付加によりどのように変化するか、またこの分岐過程の変化が決定論に基づく離散パラメータ(格子幅、時間刻み、人工粘性項等の大きさ)とどのように類似、あるいは差異があるかについて考察する。これらの検証作業における重要なポイントは、数値的な誤差に起因する構造不安定を持った複雑に見える現象のうち、膨大な量の計算結果からいかにして、その非線型な構造を抽出するかである。多くの擬似乱数を発生させて膨大なサンプルから平均的な挙動を見極める上で、高速マシンを導入して解析を行う。さらに高次元離散動的システムの解析においては、非線型な挙動を示す複雑系の内的構造を有効に視覚化できる動画による解析が有効である。これに対しては、画像処理専用パソコンと有効なソフトウェアを導入して解析を行う。

4. 研究成果

本研究ではまず、非線型微分方程式のうち周期軌道を解軌道としてもつものをモデルとして、ランダムネスが加わった場合の周期軌道の平均的な構造への依存性について数値実験を行い考察した。モデル方程式は飽和効果を持つ 3 種のロトカーボルテラ系の微分方程式であり、これを前進オイラー差分で離散化した離散力学系にランダムネスを付加した場合の周期解の構造変化を数値実験で追跡した。平均的な周期解の構造を求める上で、十分時間が経過した後にサンプリングを行い、平均をとるための計算の全サンプル

数を 1000 として SMDS を求めた。この結果、パラメータであるランダムネスの大きさの増加に対して SMDS の構造に逆の周期倍化分岐が生じ、より低い周期のリミットサイクルが得られていることがわかった。この場合の周期解は安定なリミットサイクルであるので、ランダムネスによって周期軌道からずれても 3 つのリアプノフ指数のうち 2 つが負の値をもち、基本的に安定な周期軌道に引き寄せられる。しかしながらランダムネスが大きくなり異なるサイクルの閉曲線近傍に変位させられる確率が高くなるとその平均的な挙動は、もとのリミットサイクルとは異なるものとなることがわかった。本研究の結果のように逆分岐するような過程が得られたのは非常に興味深く、これは離散力学系の周期点の場合に非常に似たものである。

現実の数値シミュレーションの数値計算結果に対して、ランダムな誤差移入がどのような影響を与えるかについて調べた。まず散逸系であるナビエーストークス方程式の数値シミュレーションについて、計算モデルとしてキャピティ流れを採用し、レイノルズ数をパラメータとする流れ構造の分岐過程に着目し、ランダムな誤差が移入したときに定常的な流れから周期的な流れに分岐する点がどのように変化するかについて数値験により調べた。またその他の離散力学系に現れるパラメータ（4 次的人工粘性項の大きさや計算格子幅、時間刻み等）との類似性や差異についても考察した。その結果、ランダムネスの大きさが大きくなると、有る値において劇的に分岐点が低レイノルズ数側に变化することを突き止めた。これは、ランダムネスの付加が系を不安定化させることを示している。一方 4 次的人工粘性項の大きさが小さくなった場合には非線型の誤差を散逸させる効果が小さくなるため誤差が増大し系が不安定化するが、ランダムネスの移入による影響がこの不安定化現象に近いことを示していると推測される。

以上のように、散逸系では極限集合が得られるため、ランダムネスが付加された場合の平均的な挙動を追跡することが比較的容易である。しかしながら、保存系の場合には、その構造不安定性のために、統計量を抽出することが困難である。ただ圧縮性流体におけるオイラー方程式の解である定常衝撃波の位置は、ランダムなノイズの影響を追跡することによって、その平均的な挙動が求められる可能性があると考え、この見通しの上で数値計算による解析を行った。計算モデルとして、よく知られた NACA0012 2 次元翼の周りの遷音速流れに対するオイラー方程式を Harten の TVD 法を用いて数値的に解いた。ランダムネスが付加されない場合には、境界層の剥離による渦と衝撃波の相互作用が生じないため、定常状態では衝撃波は全く振動しない。これにランダムネスを付加して計算を行うと、非定常的な渦が上面及び下

面で非対称な構造をとりながら前後に振動していることが見られた。また衝撃波の強さも大きく変動しており、これらからランダムなノイズが一様に加えられているにもかかわらず、衝撃波の変動が協調的に生じており、あたかもマッハ数や迎角といったパラメータがランダムに振動して衝撃波が振動しているように見えることが示された。擬似乱数の種を換えて異なる乱数列を用いて行った計算を比較しても時間的な違いは当然あるものの協調的な衝撃波の変動が見られた。またランダムネスの大きさが大きくなると、衝撃波の振動する領域が下流方向に移動し、振動する衝撃波はマッハ数が大きい場合に生じる領域に見られるようになることが示された。一方、衝撃波の位置を近似的に求め、その位置の時間変化から、平均位置や標準偏差といった統計量を計算した。その結果、衝撃波の平均位置は乱数列の違いに対してはあまり違いはなく、ランダムネスの大きさが大きくなると、衝撃波の平均位置はより後方に位置し、変動の標準偏差も大きくなることが示された。この結果は、保存系の数値解においてもランダムな誤差が入ることで計算の信頼性が損なわれることを実証していると考えられ、非常に興味深い。また、周期が小さい擬似乱数列によるランダムな誤差が入ったときには全く異なる平均的な挙動を示すことがわかった。これはランダムネスの精度の計算の信頼性に対する重要な情報を与えると考えられる。

さらに楕円柱周りの 2 次元遷音速流れに対して、圧縮性ナビエーストークス方程式の数値シミュレーションに Harten の TVD 法を適用し、衝撃波と渦の相互作用等の現象に対してランダムネスが与える影響について考察した。この場合もオイラー方程式の場合と同様に付加したランダムネスが大きいほど衝撃波の位置が全体として風下側に移動することが示されたが、さらに局所的にランダムネスを付加する領域を限定してその効果を調べた。その結果、ランダムネスによって楕円柱前方に形成されたと考えられる高マッハ数領域が、物体まで移流することで、一時的に物体周りの流速が高速になったためではないかとの結論を得た。

一方分担者の税所は、DNA に致命的な損傷を与える 2 本鎖切断 (dsb) の放射線照射による生成プロセスを、確率論的モデルにより解析した。特に、低線エネルギー付与 (LET) 条件下において、dsb 生成の、放射線量と LET に関する依存性について、よりよい確率モデルを構築する上で計算機によるシミュレーションも行って実際に観察される現象と照らし合わせ議論した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計6件)

Hataue, I., On Dependence of Structure of Numerical Solutions of Compressible Euler Equations on Random Noises, *Theo. Appl. Mech.*, 62(2014), 81-89, 査読有, <https://www.jstage.jst.go.jp/browse/nctam>

Tang, L. and Hataue, I., Dependence of Bifurcation of Flow Structure in Cavity on Numerical Conditions, *Information*, 16(2013), 7297-7309, 査読有, <http://www.information-iii.org/index-j.html>

Hataue, I., On the Structural Stability of Discretized Burgers' equation with Randomness, *Information*, 14(2011), 2585-2598, 査読有, <http://www.information-iii.org/index-j.html>

Saisho, Y. and Ito, A., Mathematical Models of the Generation of Radiation-Induced DNA Double-Strand Breaks, *J. Math. Biol.*, 67-3 (2013), 717-736, 査読有, 10.1007/s00285-012-0567-0

税所 康正, 伊藤 敦, DNA 2 本鎖切断生成の確率モデル, 数理解析研究所講究録 1853(2013) 202 - 209, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html>

税所 康正, セミの羽化と交尾についての確率論的考察, 数理解析研究所講究録 ,1751(2011), 89-94, 査読無, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/kokyuroku.html>

〔学会発表〕(計20件)

畑上到, 白鳥昇治, 遷音速流れへのノイズ付加による衝撃波の位置変動に関する数値的研究, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第 17 回シンポジウム, 2014 年 1 月 11 日~12 日, 愛媛大学(愛媛県)

税所 康正, 伊藤敦, 放射線による DNA2 本鎖切断生成の LET 依存性を表す数理モデル, 日本放射線影響学会第 56 回大会, 2013 年 10 月 18 日~20 日, ホテルクラウンパレス青森(青森県)

税所 康正, 伊藤敦, 放射線による DNA 切断生成の数理モデル, 第 23 回日本数理生物学会大会・企画シンポジウム「放射線による DNA 損傷問題の周辺 数理モデルの可能性と役割」, 2013 年 9 月 11 日, 静岡大学(静岡県)(企画シンポジウム講演)

畑上到, 白鳥昇治, 楕円柱まわりの遷音速流れにおけるノイズの影響に関する数値的研究, 日本応用数理学会 2013 年度年会, 2013 年 9 月 9 日~11 日, アクロス福岡(福岡県)

税所 康正, 放射線による DNA 2 本鎖切断生成を表現する確率モデルについて, 第 50 回放射線影響懇話会, 2013 年 7

月 27 日, 佐賀大学(佐賀県)(招待講演)

伊藤 秀一, Birkhoff normalization of commuting maps associated with superintegrable systems, 「KAM 理論とその周辺」研究集会, 2013 年 6 月 19 日~21 日, 金沢大学サテライトプラザ(石川県)

Saisho, Y., Examples of random variables in the field of mathematical biology, Taiwan-Japan Bilateral Symposium on Mathematics Education 2013, National Taiwan Normal University, 2013 年 6 月 6 日~8 日, Taipei(Taiwan)

Tang, L. and Hataue, I., Study of the Effect of Numerical Conditions on Bifurcation Region in Fluid Simulations, Proceedings of the Sixth International Conference on Information, 2013 年 5 月 8 日~11 日, Tokyo(Japan)

伊藤 秀一, Superintegrability of vector fields and their normal forms near equilibrium points, 日本数学会 2013 年度年会, 函数方程式論分科会, 2013 年 3 月 20 日, 京都大学(京都府)

畑上到, 圧縮性オイラー方程式の数値解の構造へのランダムなノイズの影響について, 第 62 回理論応用力学講演会, 2013 年 3 月 6 日~8 日, 東京工業大学(東京都)

畑上到, 和泉明憲, 3 種の生物の補食・競争数学モデルにおける種々のパラメータ依存性に関する研究, 日本応用数理学会環瀬戸内応用数理研究部会第 16 回シンポジウム, 2013 年 1 月 5 日~6 日, 愛媛大学(愛媛県)

税所 康正, 伊藤 敦, 放射線による DNA 2 本鎖切断生成の確率モデルについて, バイオメディカル・ファジィ・システム学会第 25 回年次大会, 2012 年 12 月 26 日~27 日, 東京都市大学(東京都)

税所 康正, 伊藤敦, DNA 2 本鎖切断生成の確率モデル, 2012 年度京都大学数理解析研究所共同利用研究集会: 第 9 回「生物数学の理論とその応用」, 2012 年 11 月 13 日~16 日, 京都大学数理解析研究所(京都府)

税所 康正, セミ類の発音生態の問題点 - 概論から数理的取り扱いまで -, 日本音響学会関西支部第 8 回動物音響懇話会, 2012 年 11 月 10 日, 同志社大学(京都府)(招待講演)

伊藤 敦, 税所 康正, 低 LET 放射線による DNA 2 本鎖切断生成過程の確率モデル, 日本放射線影響学会第 55 回大会, 2012 年 9 月 6 日~8 日, 東北大学(宮城県)

Saisho Y., Some stochastic approaches for biological problems, The 8th

International Conference on
Differential Equations and Dynamical
Systems, 2012 年 8 月 1 日～4 日,
University of Waterloo,
Ontario(Canada) (招待講演)

伊藤 秀一, 超可積分ハミルトン系の特異
点と作用-角変数, 日本数学会 2012 年
年度年会, 幾何学分会, 2012 年 3 月 28
日, 東京理科大学 (東京都)

畑上 到, ランダムノイズが周期解に及ぼ
す影響に関する数値的考察, 日本数理学
会第 15 回環瀬戸内応用数理研究部会シ
ンポジウム, 2011 年 12 月 3 日, 山口東京
理科大学(山口県)

Hataue, I., Study of Structure of
Ensemble Average in Compressible
Flow Simulations with Randomness,
2011 International Conference on
Applied and Engineering Mathematics,
2011 年 10 月 30 日, Guangdong Hotel
Shanghai(China)

Ito, H., Birkhoff normalization of
symplectic maps and generalized
action-angle coordinates for
superintegrable systems, "Dynamical
Systems and Classical Mechanics"
conference at ICMS (International
Center for Mathematical Sciences),
2011 年 10 月 3--7 日, Edinburgh
(Scotland)

[その他]

ホームページ等

<http://cpm.ec.t.kanazawa-u.ac.jp/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

畑上 到 (HATAUE ITARU)

金沢大学・電子情報学系・教授

研究者番号: 5 0 2 1 8 4 7 6

(2) 研究分担者

伊藤 秀一 (ITO HIDEKAZU)

金沢大学・数物科学系・教授

研究者番号: 9 0 1 5 9 9 0 5

税所 康正 (SAISHO YASUMASA)

広島大学・工学(系)研究科(研究院)・

准教授

研究者番号: 7 0 1 9 5 9 7 3