

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：13401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540134

研究課題名(和文)一般化熱統計学の情報幾何とその応用

研究課題名(英文) Information geometry of generalized thermostatics and its applications

研究代表者

小原 敦美 (Ohara, Atsumi)

福井大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90221168

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：物理や情報統計科学で様々な重要な働きを示す確率密度関数やエントロピーの概念に関する一般化に対し、その数理構造を情報幾何学的な観点から考察することで、明確な意味づけを行いかつそれらのいくつかの新しい応用に関する成果をあげた。

具体的に大別して述べると、(1)通常の指数関数、対数関数からべき関数に拡張することで得られる確率密度関数、エントロピーなどの概念が、幾何的に良い性質(ある種の平坦性)を維持すること、(2)これにもとづき、非指数型の(特にべき型の)確率概念が背後に潜むと考えられる物理現象や統計データの解析や活用に関する新たな手法を開発した。

研究成果の概要(英文)：Generalizing concepts such as probability density functions or entropies, which play important roles in statistical physics and information sciences, we study their mathematical structure from information geometrical viewpoints and obtain several results for its new application in such fields.

First, we have proved that geometrically nice properties, which are related to flatness in differential geometrical sense, are still maintained, even if the ordinary exponential and logarithmic functions in probability densities or entropies are replaced with power functions. Second, utilizing this nice geometrical structure, we developed several methods to analyze physical phenomena and statistical data those such stochastic structure governs.

研究分野：情報幾何学

キーワード：情報幾何学 一般化熱統計学 正定値対称行列 力学系 共形平坦化

1. 研究開始当初の背景

多数の個体やデータが関与する様々な現象を解析する統計科学・情報理論・統計力学などの分野では、「指数型分布」と「ボルツマン-シャノンエントロピー」を基礎とした枠組みが理論的に大きな成功を収めている。そこでは、時空間的に近接した個体・データ同士以外は互いにあまり影響されずにほぼ独立に振る舞うという仮定が本質的である。しかし近年物理をはじめとするいくつかの分野では、長距離あるいは長時間の相互作用が働き、力学系の平衡状態での分布が通常のボルツマン分布(指数型)ではなく「べき分布」となるような系の振る舞いや構造が非常に注目されるようになってきている。

このような系を解析し理解するために**一般化エントロピー**を用いた熱統計学の方法論が提案され、特に複雑系などを中心に多くの分野で観測されるべき分布に関してはその背後に存在する豊かな数理構造への理解が少しずつ深まりつつある。他方これとは独立に統計科学でも、はずれ値に鋭敏に反応してしまう指数型分布と最尤推定の組み合わせよりロバストな母数推定のためには、べき型も含む**一般化指数型分布**と**一般化相対エントロピー**を用いることが有効であることが認識され、それらの基礎付けと応用の成果が報告され始めている。

2. 研究の目的

エントロピーや自由エネルギーの概念を一般化することで、熱・統計力学だけでなく情報・統計科学でも研究と応用の範囲を近年広げつつある**一般化熱統計学**(generalized thermostatics)は、いくつかの共通の数理構造を介して**情報幾何学**と密接に関連することが申請者の研究によりわかってきた。

本研究ではこれらの結果をより深く掘り下げるために具体的に次の二点を目的とした。

(1)一般化熱統計学の背後にある数理的な構造や性質を情報幾何の手法を用いて解明すること。

(2) (1)の一つの自然で重要な応用として、得られた結果を用いて非線形拡散方程式やマルコフ連鎖などの確率分布空間上で定式化される力学系の解の振る舞いを明らかにすること。

3. 研究の方法

本研究は連携研究者らの協力を得ながらも基本的には申請者が単独で進めた計画である。

計画実施の当初は**共形平坦化**の結果により糸口の見え始めている研究目的(1)から手がけ、エスコート確率の意味づけの明確化とそこに伴われる幾何構造の吟味や統計・情報科学への応用を考察し、研究成果を確立させた。

同時に、以降の研究目的(1)から(2)へ向けての文献調査とともに情報収集、知識獲得の準備活動も行い、これらをもとに更にアイデアを創出し、結果を発展させた。ポイントは情報幾何が提供する**計量・接続の双対性**が、一般化熱統計学や関連する力学系の問題においてルジャンドル双対性に相まってどのように反映され、いかなる結果を産み出すのかを見いだすことであった。

連携研究者として、情報幾何だけでなく統計・情報科学、アファイン微分幾何に造詣の深い藤原彰夫氏(大阪大学)と松添博氏(名古屋工業大学)の二名と連絡を取りながら研究を進めた。また、本研究は広い分野に関係する学際的な研究なので、他の協力者や専門家とも積極的な研究討論や情報交換を行った。

4. 研究成果

(1)一般化指数型分布族の中で理論的に最も重要であり、様々な実例も豊富であるq-指数型分布族について、共形変換に基づいて従来

のものとは異なる新しい双対幾何構造が定義できることを示した。この双対平坦構造から自然に導かれる一般化エントロピーや一般化相対エントロピーを求め、ピタゴラスの定理を用いてこのエントロピーに対する最大エントロピー定理も示した。また一つの応用としてこの構造を用いた最尤推定がベイズ MAP 推定と解釈できることを示した。

(2)アファイン微分幾何的な観点から導入される統計多様体構造とそれを共形変換して得られる双対平坦構造の対比を考えることで、一般化熱統計学に現れるエントロピー、ダイバージェンス、エスコート分布といった数理論構造の関係を明らかにすることができた。

(3)(2)の応用として、離散確率分布(すなわち確率単体)上のフィッシャー計量に対する勾配系でありレプリケータ方程式に対応する共形平坦化空間での力学系の性質の一端を明らかにした。

(4)ロバストな統計的推論に有用な確率分布族(Uモデル)と、変形ポテンシャル及び一般化エントロピーから得られる正定値対称行列上の統計多様体構造の対応づけを行った。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計10件)

[1] Shinto Eguchi, Osamu Komori and Atsumi Ohara, Duality of Maximum Entropy and Minimum Divergence, *Entropy*, Vol.16, 3552-3572 (2014). 査読有り

DOI: 10.3390/e16073552

[2] Satoshi Kakihara, Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya, Curvature integrals and iteration complexities in SDP and symmetric cone programs, *Computational Optimization and Applications*, Vol. 57, No.3, 623-665 (2014). 査読有り

DOI: 10.1007/s10589-013-9608-x

[3] Atsumi Ohara and Shinto Eguchi, Group Invariance of Information Geometry on q-Gaussian Distributions Induced by Beta-Divergence, *Entropy*, Vol.15, 4732-4747 (2013). 査読有り

DOI: 10.3390/e15114732

[4] Takafumi Kanamori and Atsumi Ohara, A Bregman Extension of quasi-Newton updates II: Analysis of Robustness Properties, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 253, No. 1, 104-122 (2013). 査読有り

DOI: 10.1016/j.cam.2013.04.005

[5] Satoshi Kakihara, Atsumi Ohara and Takashi Tsuchiya, Information Geometry and Interior-Point Algorithms in Semidefinite Programs and Symmetric Cone Programs, *Journal of Optimization Theory and Applications*, Vol. 157, No. 3, 749-780 (2013). 査読有り

DOI: 10.1007/s10957-012-0180-9

[6] Takafumi Kanamori and Atsumi Ohara, A Bregman Extension of quasi-Newton updates I: An Information Geometrical framework, *Optimization Methods and Software*, Vol. 28, No. 1, 96-123 (2013). 査読有り

DOI:10.1080/10556788.2011.613073

[7] Tatsuaki Wada, Atsumi Ohara and Antonio Scarfone, Relationships Between the Legendre Structure in the S_2 -q-Formalism and the Dually-Flat Structure in the Space of Escort Distributions, *Reports on Mathematical Physics*, Vol. 70, 181-192 (2012). 査読有り

DOI:10.1016/S0034-4877(12)60038-X

[8] Shun-ichi Amari, Atsumi Ohara and Hiroshi Matsuzoe, Geometry of Deformed Exponential Families: Invariant, Dually-Flat and Conformal Geometries,

Physica A, Vol. 391, 4308-4319 (2012). 査読有り

DOI: 10.1016/j.physa.2012.04.016

[9] Atsumi Ohara, Hiroshi Matsuzoe and Shun-ichi Amari, Conformal Geometry of Escort Probability and its Applications, *Modern Physics Letters B*, Vol.26, No.10, 1250063 (14pp) (2012). 査読有り

DOI: 10.1142/S0217984912500637

[10] Shun-ichi Amari and Atsumi Ohara, Geometry of q -Exponential Family of Probability Distributions, *Entropy*, Vol.13, 1170-1185 (2011). 査読有り

DOI:10.3390/e13061170

〔学会発表〕(計7件)

[1] Atsumi Ohara, On representing functions of probability distributions and conformal flattening, Workshop on Information Geometry for Machine Learning, Wako Japan, 3-5 December 2014.

[2] Atsumi Ohara, Construction of Legendre dualities for generalized entropies via Conformal flattening and its applications, International Conference in Statistical Physics 2014, Rhodes Greece, 7-11 July 2014.

[3] Atsumi Ohara, Conformal flattening and generalized entropies: an affine differential geometric approach, The Second International Workshop on Information Geometry and Affine Differential Geometry, Shanghai China, 11-12 April (2014).

[4] 小原 敦美, 正定値対称行列上の情報幾何とそのいくつかの応用, 文部科学省数学協働プログラムワークショップ「正定対称行列をめぐるモデリング・数理・アルゴリズムの世界」, 政策研究大学院大学, 1月14~15日 2014

[5] Atsumi Ohara, Geometry on Positive Definite Matrices Induced from V-Potential Function, First International Conference GSI2013, Paris France, 28-30 August 2013.

[6] Atsumi Ohara, Deformation of the Legendre structures and gradient flows on the simplex, The International Workshop on Anomalous Statistics, Generalized Entropies, and Information Geometry, Nara Japan, 6-10 March 2012.

[7] Atsumi Ohara, Conformal geometry of escort probabilities and its application to Voronoi partitions, International Conference in Statistical Physics 2011, Larnaca Cyprus, 11-15 July 2011.

〔図書〕(計1件)

[1] Atsumi Ohara and Shinto Eguchi, Geometry on Positive Definite Matrices Deformed by V-Potentials and Its Submanifold Structure, *Geometric Theory of Information* (Frank Nielsen eds.), Chapter 2 (pp.31-55), Springer (2014).

〔産業財産権〕
出願状況(計0件)

取得状況(計0件)

〔その他〕
ホームページ等:

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小原 敦美 (Atsumi Ohara)
福井大学・工学研究科・教授
研究者番号: 90221168

(2) 研究分担者

無し

(3) 連携研究者

藤原 彰男 (Akio Fujiwara)
大阪大学・理学研究科・教授
研究者番号: 30251359
松添 博 (Hiroshi Matsuzoe)
名古屋工業大学・工学研究科・准教授
研究者番号: 90315177