

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 12 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540136

研究課題名(和文)相分離曲線のスケーリング極限と臨界指数の確率論的研究

研究課題名(英文)Probabilistic study toward scaling limits of the phase separation line and scaling exponents

研究代表者

樋口 保成(HIGUCHI, Yasunari)

神戸大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：60112075

交付決定額(研究期間全体):(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文):2次元正方格子上の Ising model で温度が臨界温度より上(高温域)において、外部磁場を変化させたときに+スピンのつながり方の確率は臨界磁場の値で急激に変化する。臨界磁場の直上または近傍で様々な量が多項式オーダーで0に近づくか発散する。それぞれの量の発散、収束のオーダーを示す指数(臨界指数)の間の関係式が独立な場合と同様に成り立つことを示した。このために Russo の公式と呼ばれる独立なパーコレーションに対する公式を Ising model に対して拡張した。これは二つの不等式の形になる。また、「無限クラスターの種」と呼ばれる+スピンの無限連結成分の条件付き分布の存在を示した。

研究成果の概要(英文):For the two-dimensional Ising model, at high temperature there is a critical value of magnetic field at or near which percolation probability of + spins changes rapidly. Several observables converge to zero or diverge at this critical magnetic field. We showed that like in the independent case, among exponents of divergence or convergence to zero there are some equalities called scaling relations. For this, we extended the so called Russo formula, valid for independent percolation, to the Ising model. We obtained two opposite type inequalities instead of one equality.

Further, at high temperatures, we showed the existence of limiting distribution of infinite clusters conditioned that it exists at the critical value of external field. This distribution is called the incipient infinite cluster measure.

研究分野: Probability Theory

キーワード: 2次元 Ising model パーコレーション 相分離曲線 スケーリング極限 臨界指数

1. 研究開始当初の背景

平面格子の各点に粒子をランダムに配置する。各点には確率 p で粒子があり、確率 $1-p$ で粒子が無い。それぞれの点で粒子があるかないかは独立に決まるものとする。このとき、確率 p を 0 から 1 まで変化させたとき、ある臨界的な値 p_c があり、 p が p_c を超えると粒子がある点だけをつないだ連結集合でサイズ無限大のものが確率 1 で現れる。この p_c を臨界確率と呼ぶ。無限連結集合が現れることをパーコレーションが起きるといふ。臨界確率は格子により値が異なり、三角格子では $1/2$ に等しいことがよく知られている。一方、正方格子ではその値は 0.59 に近い値であることは知られているが、真の値はわかっていない。臨界確率で、無限連結集合の境界の大域的な曲線としての分布を求めるために格子間隔を 0 に近づけた極限の分布を調べることをスケールリング極限を求めるという。

Smirnov は三角格子上のパーコレーションのスケールリング極限が SLE(6)と呼ばれる曲線族であることを証明し、さらに Ising モデルの相分離線の臨界温度での極限が SLE(3) となることまで示していたが、これらはモデルの対称性が十分な場合であり、少しでも対称性が崩れた場合の同様の問題については何も知られていない状態であった。たとえば、正方格子で同じ問題を考えた時にどうなるかは現在でも未解決の問題である。

一方、このような特殊解を求める方法とは別に、定性的な方法で臨界指数の間の関係式を求める Kesten の仕事の方向を指向して我々は Ising model のパーコレーション問題で Kesten の結果と類似の結果が成り立つことをほぼ発見していた。

2. 研究の目的

(1) 高温域の相分離線のスケールリング極限を求めること。

Ising model では (+) 符号のスピンの (-) 符号のスピンの平面格子上にばらまかれている。一つの格子点には一種類のスピンしか置かれていない。これらのスピンの隣同士で同じ符号にそろえようとする相互作用を持ち、これにより決まるギブス分布という確率分布に従ってそのばらまき方の統計分布が定まる。パラメータとして温度と外部磁場の二つが与えられ、温度は隣との相互作用の強さに対応し、磁場は外部から強制的に片方の符号を優先する力の強さのパラメータとなる。このとき (+) スピンのつながりに着目し、どこかに無限につながる (+) スピンの連結集合が現れるか否かを問題にする (+) スピンのパーコレーション問題)。ギブス分布が一つしかない高温域で考える。磁場を変化させたとき臨界的な値が一つだけ存在する。これをパーコレーションの臨界磁場と呼ぶことにする。この臨界磁場の値のところ独立なパーコレーションの時と同じようにスケールリング極限を求めることができるか、でき

るとしたらその極限はやはり SLE(6)なのだろうかという問いを発することができ、この問題を解決することを目的とした。

(2) 無限クラスタの種の分布の存在を示すこと。

よりロバストな問題として、上の問題と並行して、Kesten が示した臨界指数の関係式や、臨界点となる磁場の値のところincipient な無限クラスタ (無限クラスタの種とも呼ばれる) の分布の存在を示すことなどを目標とした。

3. 研究の方法

臨界指数の関係式を示すために Kesten が用いた方法を Ising model に使えるように変えることが一つの重要なステップとして最初に問題になった。基本的には局所的な事象の確率は Ising model でも独立な場合と同じように評価できることは知られていた。Kesten の議論では、これらの局所的な出来事を組み合わせるとより複雑な出来事の確率を評価するときに独立性が効果的に利用されていたのを Ising model に拡張するため、二つの問題を解く必要があった。一つは (+) スピンのつながりの事象と (-) スピンのつながりの事象を同時にコントロールすることで、同じ符号のスピンの事象を組み合わせることは FKG 不等式という片方向きの不等式があり容易にできるのだが、逆方向の不等式を示す必要もあり、これはギブス分布の強マルコフ性と強い混合性を使うことにより解決することができる。

もう一つは Russo の公式と呼ばれる独立な場合の確率の微分公式を事象を限定してもいいから Ising model に拡張することである。我々の場合にはいわゆる arm events と呼ばれるつながり方だけを問題にする事象に限定してこのような微分公式を準備することができる。

これらの成功をもとにスケールリング極限の問題に取り組むことができると考えていた。結果は詳しくは次の項で述べるが、残念ながら前半の準備の段階までしか終わることができなかった。

4. 研究成果

(1) 高温域における正方格子上の Ising model のパーコレーションにおいては、独立な場合と同様に種々の臨界指数の間に関係式が成り立つことを示した。この結果自身は研究開始時点でおおよそ得られていたが、上述したように、これを導く過程において、FKG 不等式と反対向きの不等式を得る方法の部分を見やすくまとめることができた。結果を少し説明する。登場する量は以下のようになる。

One arm probability:

原点から一辺の長さが $2n$ の原点を中心とする正方形の辺まで (+) スピンでつながる確率を臨界磁場のところで測ったとき、この確

率が n の $-1/\tau$ 乗のオーダーで減少すると思われている。この量を $\chi(n)$ と書く。

Connectivity:

原点と遠くの点 x とが (+) スピンでつながる確率を臨界磁場のところで測ったとき、この確率が $|x|$ の $-$ 乗で減少すると思われている。この量を $\chi(0,x)$ と書く。

Cluster size distribution:

臨界磁場の時に、原点を含む (+)スピンの連結成分のサイズが n 以上である確率は n の $-1/\tau$ 乗で減少するものと考えられている。この量を $P(n)$ と書く。

Percolation probability:

磁場 h が臨界磁場 h_c の値に上から近づくとき、原点を含む (+)スピンの連結成分が無限に大きい確率は $(h-h_c)$ の $-$ 乗で 0 に近づくとされている。この量を $\chi(h)$ と書く。

Mean cluster size:

磁場 h が臨界磁場 h_c に近づくとき、原点を含む (+)スピンの有限な連結成分の期待値は $|h-h_c|$ の $-$ 乗で発散すると思われている。この量を $\chi(h)$ と書く。

Correlation length:

原点を含む (+)スピンの有限な連結成分の各点について原点からの距離を 2 乗して足し合わせたものの平均をこの有限な連結成分の個数の平均で割ると、連結成分上の原点からの平均 2 乗距離と呼ばれる量が出る。この平方根が相関距離 (correlation length) と呼ばれ、 h が臨界磁場 h_c に近づくとき、 $|h-h_c|$ の $-$ 乗で発散するものと考えられている。この量を $\chi(h)$ と書く。

我々が得た結果は、One arm probability $\chi(n)$ の減少または connectivity $\chi(0,x)$ の減少が予想されたものであれば、両方とも予想された減少をして、cluster size distribution $P(n)$ も予想された減少をする。しかもこのとき、 $\chi = 2/\tau$ 、 $\chi = 2/\tau - 1$ が成り立つ。さらに、相関距離 $\chi(h)$ が予想されたオーダーの発散をすれば

$\chi = 2/(+1)$ 、 $\chi = 2(-1)/(+1)$ が成り立つ。これらの等式はスケーリング関係式と呼ばれ、独立な場合は Kesten によって示された。我々の結果はこの Ising model への拡張ができるというものである。

(2) また、Russo の公式に対応する微分に関する関係式については、もともとは等式なのだが、これを二つの逆向きの不等式の形に変形することで、Ising model でも使うことのできる形で証明することができた。

(3) いくつかのスピンのつながり方の事象は arm events と呼ばれ、臨界指数を直接求めることができる事象として独立なパーコレーションでは知られているが、同じことが高温域の Ising model のパーコレーションにおいても示すことができることを証明した。

以上のことは、すべて Ising model のパ

ーコレーションに関する臨界指数の関係を示すために使うこともあり、一つの論文にまとめる形で発表した。

(4) 高温域の Ising model のパーコレーションを考えて、磁場の値が臨界的な時、または臨界的な値に近づくとき、「無限クラスターの種」と呼ばれる分布が独立な場合と同様に存在することを示した。具体的には有限な箱の中で原点と境界とを結ぶ (+)スピンの path が存在するという条件を付けた確率について、箱を無限に広げたときの極限の分布が存在すること、および、この収束は磁場の値に関して一様となっていることを示した。

(5) 低温域ではもともと Ising model が相の共存を起こす。2次元では Gibbs 分布が二つの端点 μ_+ と μ_- によって常にその凸結合で表すことができる。 μ_+ は (+)スピンの支配的に現れ、 μ_- は (-)スピンの支配的に現れる。この時、低温域では臨界磁場の値は温度に無関係に 0 となる。パーコレーション確率が磁場に関して臨界磁場の値 ($= 0$) で不連続になるが、これは Ising model 自体の相転移から起因するものであり、その結果臨界磁場 (0) では、(-)スピンの支配的な Gibbs 分布 μ_- で 2 点が (+)スピンのつながる確率を測ると 2 点間の距離に関して指数的に減少する。このため、低温域では高温域で考えた種々の臨界指数が自明な値を取ることを示した。パーコレーションの確率の不連続性の影響により、Gibbs 分布の混合性の係数を臨界磁場の近傍で積分すると発散することを示した。この結果はまだ発表するには部分的であり、さらに踏み込んだ研究が必要となっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Y.Higuchi, K.Kinoshita, M.Takei, Y.Zhang,
Incipient infinite cluster in 2D Ising percolation, Markov Processes and Related Fields, 査読有, Vol. 20, 2014, 173-182

Y.Higuchi, M.Takei, Y.Zhang, Scaling Relations for two-Dimensional Ising Percolation, J.Stat. Phys., 査読有 Vol. 148, 2012, 777-799
DOI 10.1007/s10955-012-0561-3

樋口保成, 竹居正登, Yu Zhang, Scaling relations in the 2D high temperature Ising model, 数理解析研究所講究録, 査読なし, 1805 巻, 2012, 125-139

〔学会発表〕(計 3 件)

Y.Higuchi, M.Takei, Y.Zhang, 2D Ising percolation at high temperatures, RIMS 研究集会「繰り込み群の数理科学での応用」、2013.9.11、京都大学数理解析研究所(京都府)
樋口保成、パーコレーションと partially surface filling curve SLE6、研究集会「計算による数理科学の展開」、2012, 12.26、神戸大学(兵庫県)
Y.Higuchi, M.Takei, Y.Zhang, 2D Ising percolation at high temperatures, RIMS プロジェクト研究集会「Discrete Geometric Analysis」2012.8.27、京都大学数理解析研究所、(京都府)

〔図書〕(計 2 件)

樋口保成、サイエンス社、パーコレーション理論講義 基礎から SLE 理論の入口まで、2014、131。
原 隆、樋口保成、篠田正人、竹居正登、丸善出版、確率論ハンドブック、11.3 節、2012、579(434-442)。

〔産業財産権〕

出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

6. 研究組織

(1)研究代表者

樋口 保成(HIGUCHI, Yasunari)
神戸大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：6 0 1 1 2 0 7 5

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

竹居 正登(TAKEI, Masato)
横浜国立大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号： 6 0 4 6 0 7 8 9