

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 10 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540141

研究課題名(和文)準結晶構造における制御点集合を用いた近似グリッドの構成

研究課題名(英文)The construction of approximate grids for quasicrystals using control points

研究代表者

小松 和志 (Komatsu, Kazushi)

高知大学・教育研究部自然科学系理学部門・准教授

研究者番号：00253336

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：正三角形と正方形のタイルで、頂点周りの配置が3種類となる6回回転対称性をもち非周期を満たすタイル張りを系統的に構成する方法を与えた。置換規則で得られるくさび型の非有界領域のタイル配置を用いて全平面のタイル貼りを構成する方法を定式化し、7回回転対称性をもつDanzerタイル貼りに適用した。これらの結果を得る際に得られた手法を応用して、5個の炭素原子から成る直鎖炭化水素分子の数理モデルの配置空間の位相型を決定した。

研究成果の概要(英文)：We construct a family of uncountable many non-periodic 3-Archimedean tilings with 6-fold rotational symmetry, that admit three type of vertex configurations by regular triangles and squares. As a limit of the patch sequence, we obtain a tiling or an unbounded configuration. In Danzer tilings, we cover all singular vertex configurations and all wedge-shaped unbounded configurations by up-down generation. We construct non-periodic tilings by gathering wedge-shaped unbounded configurations around a point.

We provide a mathematical model of n-membered hydrocarbon molecules. The configuration space of the model straight-chain hydrocarbon molecules is parametrized by chain lengths. We determine the topological types of fibers of the configuration space of the model by chain lengths when $n = 5$.

研究分野：応用トポロジー

キーワード：タイル貼り 数理モデル

1. 研究開始当初の背景

準結晶という物質は単純な局所構造をもつが、そこから成長して、準周期性、非周期性といった大域的な構造が得られる。その原理は十分に分かっているとは言いがたいものと思われる。高分子に見られる準周期構造に対しても構造計算や不変量を求めることは容易ではない。その数理モデルである非周期タイル貼り及び準周期タイル貼りを、タイリング距離から得られるトポロジーにおいて、周期タイル貼りの列の極限構造として表現するような手続きが必要となる。そのため、非周期タイル貼り及び準周期タイル貼りの構成において、タイルの局所配置から大域的な性質である準周期性、非周期性がどのように得られるかを研究することは重要な課題である。

2. 研究の目的

非周期タイル貼り及び準周期タイル貼りの構成法において、タイルの局所配置における頂点集合を制御することにより、準周期性、非周期性を満たすように配置を拡大するやり方を定式化することを目的とする。これは準結晶という物質を単純な局所構造から出発して、成長してゆく過程をいかに記述するかということにあたる。特に、回転対称性及び単純な頂点周りのタイルの局所配置をもつような非周期タイル貼り及び準周期タイル貼りを構成するやり方を定式化することに重点を置く。

また、この際に得られた配置を記述する手法を炭化水素分子の数理モデルの配置空間に応用することで、配置空間のトポロジーを調べる。

3. 研究の方法

非周期タイル貼り及び準周期タイル貼りの構成法については、射影法、置換規則を用いた構成法、環状拡大とその過程を記号列の置換規則による表現を用いた構成法の3つを取り扱う。特に、最後の環状拡大の過程の記号列の置換規則による表現は研究分担者のひとりである秋山茂樹氏により考案された手法である。回転対称性を有することやタイルの形状や種類、頂点周りのタイルの配置の種類を限るといった制約のもとで豊富な(正確にいうなら非可算無限種類の)タイル貼りを構成してゆく。

構成の際にはその構成の過程を制御する必要がある。射影法においてはタイルの局所配置から導かれるフラクタル構造(入れ子構造)を調べる。一定方向への拡大を許した置換規則の適用とその性質を調べる。置換規則の枠組み自体を拡張してタイルの局所配置をタイルの局所配置に置換するという置換規則を考案する。環状拡大の過程の記号列の置換規則による表現を有向グラフ(オートマトン)を用いて視覚化した形で拡大過程とその選択肢を表現する。タイル貼りのされる空

間をユークリッド平面ばかりではなく双曲平面の場合にも考察する。これらのアプローチを組み合わせることにより多角的に研究目的を調べてゆく。

4. 研究成果

(1) Danzer タイル貼りに現れ得るタイルの頂点周りのタイルの配置を調べ上げ、さらにタイル貼りは構成されるが調べ上げた頂点周りのタイルの配置のリストにないものを見つけた。リストにない頂点周りのタイルの配置をもつタイル貼りはその性質が Penrose タイル貼りと比較して特異なものであるという結果を得た。これは Danzer タイル貼り及び Penrose タイル貼りというタイル貼り間の差異から生じるのではなく置換規則のもつ性質から生じるものであることが分かった。

(2) フィボナッチ列は最少の複雑度をもつ一次元の準結晶構造である。すなわち、タイルの局所配置がどんな範囲でも一番単純なものである。射影法によりフィボナッチ列を構成する場合に、それらのタイルの局所配置から与えられるウインドウの分割がフラクタル構造(入れ子構造)をもつという結果を得た。

(3) タイルの形状、種類を正三角形と正方形の2種類に制約する。さらに頂点周りのタイルの配置の種類を3種類に限る。このようなタイル貼りを3-アルキメデスタイル貼りという。タイルをタイルの局所配置に置き換えるという通常の置換規則の概念を拡張して、タイルの局所配置をタイルの局所配置に置換するという置換規則を考えることにより、準周期3-アルキメデスタイル貼りの非可算種類から成る族を構成するという結果を得た。

(4) ユークリッド平面におけるタイル貼りの非周期性の定義の間の関係と同様の関係が双曲平面におけるタイル貼りに与えられる非周期性の定義に対して成り立つことを示した。

(5) 準結晶の数理モデルである準周期タイル貼りを構成する主要な方法の一つに置換規則がある。置換規則では必ずしも、タイル貼りが得られるわけではなく、くさび型の非有界領域におけるタイル配置が得られる場合がある。最も有名な5回回転対称性をもつペンローズタイル貼りはくさび型の非有界領域におけるタイル配置を貼りあわせることで全平面のタイル貼りを構成するという方法で得られる。このくさび型の非有界領域のタイル配置を貼りあわせて全平面のタイル貼りを構成する方法を定式化し、7回回転対称性をもつ(平面)Danzer タイル貼りに適用可能であるという結果を得た。

(6) 6 回回転対称性をもつ非周期タイル貼りについては、どのくらい単純な局所配置からそのような非周期タイル貼りを構成することができるのかという観点で研究を進めた。正三角形と正方形の2種類をタイルとしてもち、頂点周りの配置が3種類となるタイル貼りが考察され、その結果として、環状拡大と呼ばれるタイルを同心円状に配置してゆく6回回転対称性をもつ非周期を満たすタイル張りを系統的に構成する方法としてを採用し、その拡大過程が有向グラフ(オートマトン)を用いて表現できることを示した。

(7) 双曲平面におけるタイル貼りに対して、それが双曲型変換による対称性を全く持たないとき、強非周期性をもつといい、タイル貼りの自己同型変換群の基本領域が有界でないとき、弱非周期性をもつという。単一のタイルで弱非周期タイル貼りの非可算種類から成る族を構成可能なタイルの存在が知られているが、そのタイルを用いて頂点周りの配置が1種類であるような強非周期タイル貼りの非可算種類から成る族を構成可能であるという結果を得た。

(8) 炭化水素分子の数理モデルにおける次の結果が得られた。5,6,7個の炭素から成る環状炭化水素分子の数理モデルである閉チェーンを与え、特定の局所配置をもつ閉チェーンが存在し得るかどうかを判定することにより、その配置空間が球面と同じ位相型をもつという結果を得た。

(9) 5,6,7個の炭素から成る環状炭化水素分子の数理モデルの配置空間が球面と微分同相であるという結果を二面角から定義される配置空間上の実数値関数がモース関数であることを示すことにより証明した。

(10) 環状分子の数理モデルについて、上記の(7)(8)の結果が実際の7員環におけるコンフォメーションの相互変換経路ネットワークについて実験で検証することで、数理モデルの妥当性が証明された。またこの結果により、7員環よりも大きな環状分子への数理モデルの適用の可能性があると判明した。

(11) 3次元ユークリッド空間における頂点数 n をもつ閉チェーンに対して、 n が5,6,7,8 のとき、その配置空間が球面と同相であるためのボンド角の十分条件を決定するという結果を得た。

(12) 5個の炭素原子から成る直鎖炭化水素分子の数理モデルの配置空間をチェーンの長さによりパラメータ付けを行い、パラメータの取り得るそれぞれの長さでの空間

の位相型を決定することができた。

(13) 3次元ユークリッド空間における頂点数 n をもつ閉チェーンに対して、閉チェーンが正 n 角形にほとんど近くなるようなボンド角をもつとき、その配置空間が球面と同相であるという結果を得た。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計11件)

Goto, S., Komatsu, K. and Yagi, J.,
The configuration space of a model for
5-membered straight-chain hydrocarbon
molecules parametrized by chain lengths,
Nihonkai Mathematical Journal、査読有、
Vol. 26、2015、pp.37-45

Kinoshita, N. and Komatsu, K.,
On non-periodic 3-Archimedean tilings
with 6-fold rotational symmetry, Hiroshima
Mathematical Journal、査読有、Vol. 45、
2015、pp.137-146

Hayashi, H., Komatsu, K. and Yamauchi, M.,
A note on the construction of
non-periodic tilings by attaching
wedge-shaped unbounded configurations,
Kochi Journal of Mathematics、査読有、
Vol. 10、2015、pp. 53-60

Kishimoto, S. and Komatsu, K.,
On non-periodicity for tilings in the
hyperbolic plane、Kochi Journal of
Mathematics、査読有、Vol. 9、2014、
pp.145-152

Kinoshita, N. and Komatsu, K.,
An example of a quasiperiodic
3-Archimedean tiling by regular triangles
and squares, Kochi Journal of Mathematics
、査読有、Vol. 9、2014、pp.121-125

Goto, S., Komatsu, K. and Terada, H.,
Topology of the Interconversion Pathway
Networks of Cycloheptane Conformations
and Those of Related n -Membered Rings、
Bulletin of the Chemical Society of Japan
、査読有、Vol.86、2013、pp.230-242

Goto, S., Hemmi, Y., Komatsu, K. and Yagi, J.,
The closed chains with spherical
configuration spaces、Hiroshima
Mathematical Journal、査読有、Vol. 42、
2012、pp.253-266

Goto, S., Komatsu, K. and Yagi, J.
A remark on the configuration space of a

model for ringed hydrocarbon molecules、Kochi Journal of Mathematics、査読有、Vol. 7、2012、pp.89-96

Goto, S. and Komatsu, K.、The configuration space of a model for ringed hydrocarbon molecules、Hiroshima Mathematical Journal、査読有、Vol. 42、2012、pp.115-126

Hayashi, H. and Komatsu, K.、The subdivision of the window derived from finite subsequences of Fibonacci sequences、Nihonkai Mathematical Journal、査読有、Vol. 22、2011、pp.59-66

Hayashi, H., Kawachi, Y., Komatsu, K., Konda, A., Kurozoe, M., Nakano, F., Odawara, N., Onda, R., Sugio, A. and Yamauchi, M.、Notes on vertex atlas of Danzer tiling、Nihonkai Mathematical Journal、査読有、Vol. 22、2011、pp.49-58

〔学会発表〕(計 0件)

〔図書〕(計 0件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小松 和志 (KOMATSU, Kazushi)
高知大学・教育研究部自然科学系・准教授
研究者番号：00253336

(2) 研究分担者

秋山 茂樹 (AKIYAMA, Shigeki)

筑波大学・数理物質科学研究科(系)・教授
研究者番号：60212445

後藤 了 (GOTO, Satoru)
東京理科大学・薬学部・教授
研究者番号：50253232

江居 宏美 (EI, Hiromi)
弘前大学・理工学研究科・助教
研究者番号：60333051

(3) 連携研究者

()

研究者番号：