様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ４ 月　 ３ 日現在

機関番号：３２６８２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１５０
研究課題名（和文）移動境界問題の統一的な数値解法の確立

研究課題名（英文）Establishment of unified numerical methods for moving boundary problems

研究代表者
矢崎　成俊（Yazaki, Shigetoshi）

明治大学・理工学部・准教授

研究者番号：００３２３８７４

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：異なる媒質を隔てる境界面が時々刻々と移動するとき，その境界面を移動境界と呼び，移動境界を数学的，あるいは数値的に追跡する問題を移動境界問題という．申請研究においては，移動境界問題の数値解法について研究した．なるべく汎用性が高い数値スキームを開発し，さまざまな移動境界問題に対する個別の数値解法を統一することを試みた．研究期間中に，曲率流方程式などの典型的な移動境界問題に対しては，極めて一般的な統一的数値解法を開発できた．数値スキームなどの収束性の証明は今後の課題である．

研究成果の概要（英文）：When the interface between different mediums moves, the interface is called moving boundary, and the problem of tracking moving boundaries mathematically and numerically is called moving boundary problem (MBP in short). In the present research, we have studied numerical methods for MBPs, and tried to develop quite general numerical schemes and establish unified numerical methods for various MBPs. Within the research periods, we could develop quite nice unified numerical methods for curvature flow equations which are typical MBPs. Mathematical proofs such as convergence of the numerical schemes are on-going research.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：移動境界問題　Hele-Shaw問題　曲率流方程式　曲率依存型接線速度　結晶成長　スパイラル　数値スキーム　雪結晶

１．　研究開始当初の背景

異なる媒質間を隔てる境界が時々刻々と変形していく現象の数理科学的問題を移動境界問題と総称する.異なる物質,あるいは同一の物質でも異なる状態であれば,それらの間には境界が存在する.し たがって,身の周りの至る所でそのような動く境界は観察され,その時間変形する境界を首尾良く追跡することは,理学的にも工学的にも重要な課題となっている. 現在までに,様々な移動境界問題に対して,個別に“良い”解法が開発されているが,統一解法はない.一方で,その“良さ”は統一的な視点から解明されつつある.そこで,当該申請研究では,個別問題で発展している解法を統一的に扱い,汎用性が高く,単純で,高精度で,かつ元の問題の性質を保存する解法・数値スキームを確立することを研究背景とした.

以下により詳しく背景と動機を述べる.

申請者がこれまで研究してきた移動境界問題と個別に“良い”解法を以下に記す.

(1) クリスタライン曲率流(以下,CCF).結晶成長のモデルとして’90 年前後に提案された.特 異な異方性を持つ曲率流であり,常微分方程式系で記述される.解曲線の漸近挙動などがその研究対 象となり,既に申請者も含めた多数の研究結果があるが,個別問題についてであり,一般論の構築が 急務である.更に,CCF は数値計算の観点からも有用で,収束性などいくつかのスキームの数学的結 果が得られているが,3 次元計算の結果はまだあまりない.

(2) 曲率調節型の移動境界追跡法.離散化による近似分点の過度の集中・分散を避けるため,様々 な分点の一様配置による安定なスキームが提案されているが,一様配置は曲線の形状と無関係であり, 近似精度の観点からは効率的ではない.申請者らは曲線の形状を鑑みた曲率調整型のスキームを開発 した.CCF の接線速度の本質を捉えたことから本方法のヒントを得た.本方法は,境界線が時々刻々と変形運動するような,あるいはそれを抽出する必要があるような様々な問題に適用可能な方法であ る.例えば,画像処理の 1 つである画像輪郭抽出にこのスキームを適用すれば,分点が必要な箇所に適 切に分布され,従来の方法に比べ細部をより鮮明に輪郭抽出できる.本方法の骨子となる数値スキー ムはほぼ確立しているが,収束性など数学的な裏付けはまだ整理されていない.

(3) 折れ線曲率流.CCF より広いクラスで曲率流を考え,例えば面積速度一定の問題の場合,その 一定値を完全に保つ離散スキームの開発に成功した.本研究は,滑らかな曲線の移動境界問題の折れ 線版といえる.従って辺の数を増やすことができれば近似と言えそうであるが,それは個々の問題に 依存しており,一般論はまだ言えていない.更に,3 次元への拡張も自然になされるが,現在,理論の 整備中である.

(4) 負結晶成長のモデリング.負結晶(単結晶氷内の空像)はチンダル像の再結晶過程において現れ る.’56 年の中谷宇吉郎の研究以来,未だ数学モデルはない.申請者らは,面積保存の「双対な」CCF を用いて,簡単なモデル化に成功し,解の漸近挙動を証明した.ただし,このモデルは熱の時間変化 を考慮していなく,その点を考慮したモデルの製作が急務である.

(5) 非局所的 Allen-Cahn 方程式を用いた非等方的面積保存曲率流.非等方的,特に,クリスタラ イン・エネルギーのような特異な異方性を持つ非局所項付き Allen-Cahn 方程式の研究は皆無と言って 良い.また,(3) のように完全に面積を保存するスキームも知られていない.この方法は,いわゆる間 接法と呼

ばれる.その点で,(1)~(4) の方法のように,境界を直接折れ線で近似するような直接法とは特徴を異にする.例えば,2 つの領域が移動して接合し,1 つの領域になるような位相の変化は,直接 法では自然に扱うことは難しい.しかし,間接法では,等高面の方法と同様に補助関数(Allen-Cahn 方程式の未知関数)を用いているので,そのような変化を取り扱うことに特別の配慮はいらない.現 在,近似スキームが確立した段階である.

(6) 時間変化する隙間をもつ Hele-Shaw 流れ.2 枚のアクリル板を小さな隙間を空けて平行に設 置し,その間に粘性流体を流し込む.流体領域の時間変化は Hele-Shaw 流れとして知られている.本 研究は隙間を時間変化させた場合に,移動境界を追跡する問題である.現在,申請者は境界要素法と (2) の方法を組み合わせた新しい方法を提案している.

(7) 縦置き Hele-Shaw セル中を上昇する泡運動のモデリング.3 次元液体中の泡は,そのサイズに よって振動,或いは直線上昇する.この挙動の「数学的証明」は準 2 次元 Hele-Shaw セル内での運動 に限定しても皆無に等しい.申請者らは流れを Hele-Shaw 近似した問題に対して,代用電荷法を用い たスキームを適用しているが,上述した挙動を理解するには至っていない.(6) の方法を応用できるの ではないかと考えている.

(8) Belousov-Zhabotinsky 反応(BZ 反応)における螺旋現象のモデリング.BZ 反応は反応拡 散系によってモデリングされていて,その簡易版方程式として曲率流方程式が提案されている.現在 までに,(2) の知見を生かした接線速度を用いると,数学的により自然な曲率流モデル方程式が得られ ることがわかっている.また,より一般にある化学反応や材料科学に現れる転位はしばしば開曲線の 曲率流で表される.端点の条件は物理的要請から定まるが,数学的観点からどのような条件が適切な 問題を提供するのかの一般論は未整備である.

(9) 爆発問題.有限時間で解が発散する現象を爆発現象と呼ぶ.以下の 3 点について研究中である.(9.1) CCF や曲率流方程式において爆発現象が知られているが,その爆発レートを具体的に表示する ことは難しく,わずかな例が知られているばかりである.申請者らは,現在までに CCF に対して発 散レートの具体例を構成し,発散レートの予想ができる精度の良い数値計算法を提案してきた.(9.2) 非局所項が付与された曲率流方程式では,数値計算では爆発が予想されているが,理論的な証明はま だなされていない.(9.3) Keller-Segel 系に代表されるある放物-楕円型 PDE 系において,爆発現象が 予想されており,数値的検証を始めている.

(10) 自己相似解の完全分類.自己相似解の完全分類については,古典的曲率流に対して,既存の証 明の飛びを指摘し,新しい証明法を提案した.この方法は,一般の曲率流へも適用されているが,ま だ完全ではない.

２．研究の目的

移動境界問題は，さまざまな場面で登場する理工学的にも社会科学的にも重要な問題で，研究の歴史は相当古い．最近では，コンピュータの発展により，数学的に難しかった問題に対する傍証の役割となる数値解法が近年著しく研究されている．しかし，数値解法は個別的であるので，統一した視座からの，汎用性の高い数値解法を提案するのが研究目的である．

３．研究の方法

既存の結果の検証と新しいスキームの開発をおこなう．

４．研究成果

曲率流方程式など，移動境界問題の典型的な問題に対する汎用性の高い数値解法を提案できた．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

(1) T. Ishiwata and S. Yazaki,
"A fast blow-up solution and degenerate pinching arising in an anisotropic crystalline motion",
Discrete Contin. Dynam. Systems A 34, Issue 5 (online: 2013.10, print: 2014.5) 2069--2090.

(2) D. Sevcovic and S. Yazaki,
"On a gradient flow of plane curves minimizing the anisoperimetric ratio",
IAENG International Journal of Applied Mathematics 43 (3) (online: 2013.8.16, print: 2013.9) 160--171.

(3) M. Kimura, D. Tagami and S. Yazaki,
"Polygonal Hele-Shaw problem with surface tension",
Interfaces and Free Boundaries 15 (1) (2013.6) 77--93.

(4) D. Sevcovic and S. Yazaki,
"Computational and qualitative aspects of motion of plane curves with a curvature adjusted tangential velocity",
Mathematical Methods in the Applied Sciences 35 (15) (online: 2012.5.24, print: 2012.10) 1784--1798.

(5) D. Sevcovic and S. Yazaki,
"Evolution of plane curves with a curvature adjusted tangential velocity",
Jpn. J. Ind. Appl. Math. 28 (3) (2011) 413--442.

(6) M. Benes, S. Yazaki and M. Kimura,
"Computational studies of non-local anisotropic Allen-Cahn equation",
Mathematica Bohemica 136 (4) (2011) 429--437.

他.

〔雑誌論文〕（計９件）

〔学会発表〕（計１２件）

〔図書〕（計０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計０件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者

矢崎成俊（明治大学）
研究者番号：００３２３８７４

(2)研究分担者
（　　）

研究者番号：

(3)連携研究者
（　　）

研究者番号：