

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：32642

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540155

研究課題名(和文)不純物を含むダイマー模型の研究

研究課題名(英文)Study on dimer models containing impurities

研究代表者

貞廣 泰造 (Sadahiro, Taizo)

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号：00280454

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,300,000円、(間接経費) 390,000円

研究成果の概要(和文)：平面2部グラフの完全マッチングは統計力学のダイマー模型として深い研究がなされてきたが、非2部グラフについてはほとんど結果が知られていないといつてよい。本研究では平面2部グラフの最近接の白頂点(または黒頂点)同士をある規則で接続した辺を付加した周期平面グラフの完全マッチングについて研究した。これは辺を付加する前の2部グラフの完全マッチングに不純物を混入したものと考えることが出来る。申請時点で得られていた不純物1つだけを含む系について得られていた結果を拡張し、複数の不純物を含むものについての結果を得た。しかし、結果は大変限定的なもので、問題の難しさを再認識した。

研究成果の概要(英文)：Perfect matchings on planar bipartite graphs have been extensively studied as the dimer models in statistical mechanics. Almost no results are known for the case in which the underlying graphs are non-bipartite. In this study, we investigate the perfect matchings on the graphs which can be obtained by adding some extra edges to the planar bipartite graphs, such as square graphs and hexagonal graphs. Extra edges connecting nearest black(or white) vertices. Therefore the perfect matchings on such graphs can be considered as perfect matchings containing impurities in some sense. Generalizing our own results which describes the models with only one, we obtained some results on the cases in which multiple impurities exist. But these results are limited when compared to the single impurity case.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：loop erased random walk

1. 研究開始当初の背景

ダイマー模型とは、グラフの完全マッチング全体を状態空間とする統計力学の模型である。1990年代後半以降のダイマー模型の研究の進展は目覚しく、2006年にフィールズ賞を受賞した A. Okounkov らの業績は象徴的なものであった。しかし、これらの劇的な発展の以前から、例えばドミノタイル張りの理論は古くから離散数学や組合せ論、理論計算機科学の問題として研究されてきた。私は離散数学的、初等的な視点と手法から、この問題に取り組んできた。上述の急速な発展はダイマー配置の基礎となるグラフの平面性と二部性に完全に依存したものであり、3次元の模型や非二部なグラフに関する結果はほとんど知られていないといってよい。

二部グラフとは隣接する頂点同士が同色にならないように2色(白黒)で頂点を彩色することの出来るグラフのことをいう。例えば正方格子において、最近接頂点同士を結んだグラフ、正方格子グラフは非二部平面グラフの例である。私は正方格子グラフや六角格子グラフなどの二部グラフにおいて、最近接する黒頂点同士を結んで得られる非二部グラフ上の完全マッチングについて研究を開始し、いくつかの成果を得たところで、本申請を行った。

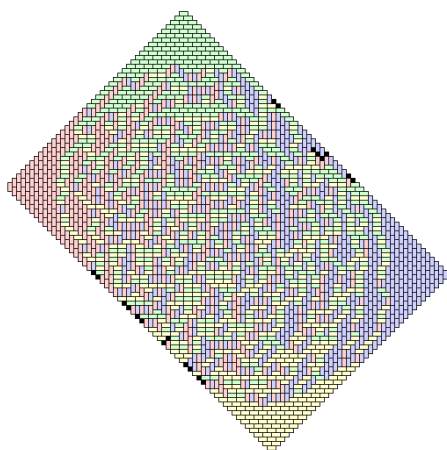


図:不純物を含むドミノタイル張り

このような系においては従来研究されてきたダイマー模型で重要な働きをする高さ関数や Kasteleyn 行列といったものが存在せず、未開な分野といえる。何を考えても初めての試みとなり、初等的、離散数学的な視点と方法や計算機実験が有効であると考えられた。

2. 研究の目的

研究開始時に不純物が一つだけ含まれるある境界条件のもとで、不純物が指定された位置に存在する確率をある行列式で与えることが出来ていた。これは Temperley bijection とよばれる完全マッチングと全域木との関係にある種の変形・拡張を行った結果得られたものである。これは研究開始時点では最も良い結果といえ、この方向、方法で、理論を拡張することが自然であるように考えられた。この境界条件は不純物を一つしか含めない。不純物の数を増やした場合に拡張することが最初の目標であった。

繰り返しになるが、ほとんど結果も道具もない対象で

あり、計算機実験が非常に有効であると考えられる。また計算機実験を積極的にを行い、データを整理することも目的であった。

3. 研究の方法

(1) 定期的なセミナーと打ち合わせ

共同研究者である学習院大学の中野史彦教授とは定期的にセミナーや打ち合わせの機会を持った。基本的文献の輪読をすることもあり、論文の草稿の細部に関する打ち合わせを行うこともあった。この活動は低予算で行え、研究を推進する上で非常に有効であった。セミナーは基本的には津田塾大学小平キャンパスで、学期中は週1度、休業期間中は月に1度の頻度で行われた。

また、期間の後半に琉球大学の石川雅雄教授とセミナーを3度行ない、多くの助言を頂いた。そのうち2回を琉球大学で行い、1回を学習院大学で行った。

(2) 出張の状況

研究発表や研究会参加、研究打ち合わせのために国内外の機関に出張を行った。

海外の出張について以下に記す。

2011年12月: 北京モーニングサイドセンターで研究発表を行った。

2013年9月: パリ大学の W. Steiner 教授とポワチエ大学の A. Bertrand 教授を訪問した。

2014年3月: チェコ工科大学の E. Pelantova 教授を訪問した。

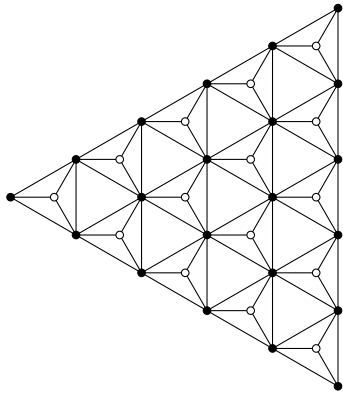
(3) 計算機実験

計算機実験を積極的に取り入れた研究を行うことを研究目的にも書いた。初年度に PC1 機を購入する予定であったが、研究機関を移ったため、計算機を調達することが可能となった。予定通り様々な数値実験を計算機を用いて行い、研究成果に示す論文 [4, 2] にある結果などを得るきっかけを与えた。

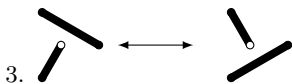
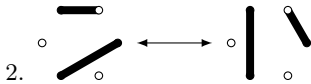
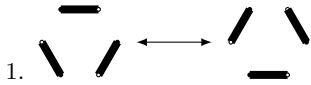
4. 研究成果

(1) 主な成果

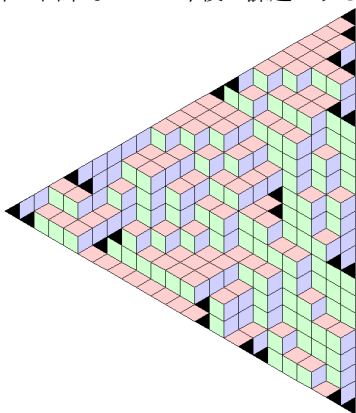
研究目的に書いた複数の不純物を含む系に関する結果を書いた論文 [4] が Journal of Statistical Physics 誌に採録された。これらの結果は申請時に得られていた結果 [1] の拡張といえる。つまり、ダイマー配置を考えるグラフとは異なるある平面グラフの上の全域木全体の集合とダイマー配置全体の集合の間の全単射 (Temperley Bijection) を更に拡張することによって得られた。これは、近年、海外の研究者により得られた loop erased random walk とグラフの全域木に関する新しい結果を応用して得られた。しかしながら、非常に限られた条件でしか応用出来ず、研究目的を十分に達成出来たものとはいえず、問題の難しさを再認識することになった。また、アステカダイヤモンドや boxed plane partition で知られている極円定理のようなものに関して全く手がかりが得られなかったことが残念に思え、今後の研究課題とするつもりでいる。



これまですべての結果は正方格子に関するものであったが、上図のような六角格子についても研究を行った。主要な結果を示す。下に示す3種の局所変形により単連結なグラフ上の完全マッチングが移りあうことを示した。

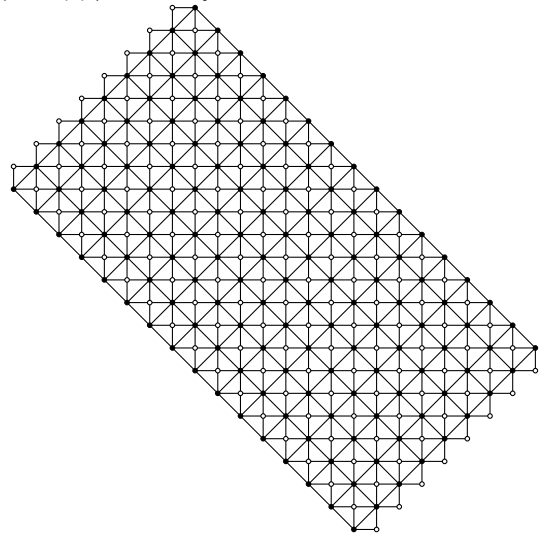


この局所変形を用いてすべてのダイマー配置を状態空間とするエルゴード的なマルコフ連鎖を構成することが出来る。定常分布を一様分布となるように推移確率を設定して、シミュレートした結果が、次の図である。白頂点と黒頂点を結ぶ辺（通常辺）を菱形で表し、黒頂点同士を結ぶ（対角辺）を黒い正三角形2つを一点で貼りあわせた図形で表している。正方格子の場合と同じく黒頂点同士を結んだ辺、不純物が境界付近に局在する様子が伺える。残念ながらこの結果をまとめ公表することが期間中に出来なかった今後の課題とする。



また、アステカ長方形と呼ばれる下の図に示す図形の完全マッチングについて転送行列法を用いてマッチングの個数の母関数を計算する実験を行った。母関数は有理関数となり分母と分子は整数係数の多項式となる係数

は非常特徴的なパターンを示すことを発見した。残念ながらこれについても結果を論文として公表することが期間中には出来なかった。



ダイマー模型そのものではないが、関連する分野で成果をあげることが出来た。その一つが繰り上がり過程 (carries process) に関するものである。繰り上がり過程の研究は Stanford 大学の Persi Diaconis 教授らにより、活発に研究されている。これは行列式過程を通してダイマー模型とも関係をもつものであるが、代数的組合せ論、表現論の様々な分野と関わる研究対象であり、ここで得られた知見がダイマー模型の研究にやがて還元出来る可能性はあると思われる。我々の得られた結果の一部を書いた論文 [2] は Advances in Applied Mathematics 誌に掲載された。この論文については Diaconis 教授らの最新の preprint において、結果が紹介されている。得られた結果を 2014 年 7 月にシカゴで開催される代数的組合せ論の国際会議 Formal Power Series and Algebraic Combinatorics 2014 において発表することが決定している。この研究の主結果を得る着想は一見関係ないように思える力学系の研究 [3] から着想を得たものである。

(2) 今後の展望

現在のところ、計画当初に期待したように完全には問題は解決しておらず、すぐに解決が見込めない状況にある。計算機実験を積極的に取り入れた初等的、離散数学的な方法・視点による方針は本研究の特色といえるが、やはり、代数的組合せ論や統計力学の方法、視点を取り入れる必要があるように感じている。基礎的な文献を読み、知識を広げる必要を感じている。

一方で計算機実験を取り入れた初等的、離散数学的な視点と方法は独自のもので、申請者の特徴といえるので、今後もこのような方法・視点による研究を続けるつもりである。計算機のソフト・ハードがともに発達した研究に必要な計算をだれもが出来る環境が整っているとあまり思えないので、こうした環境を整備することも一つの目標としたい。

また、ダイマー模型はタイル張りとして初等的に導入出来、線形代数などの初等的な数学が活躍する様子を見ることが出来る数学教育にとって格好な題材であるので、効果的に授業等の題材に用いることを試みていきたい。

研究成果にも示したように、ダイマー模型そのものでないが、関連する代数的組合せ論や離散数学の研究を

開始している。これらの間の思いがけない関係を見出すことが、新しい進展をもたらすと考えられる。

5. 主な発表論文等

【雑誌論文】(4件)

- [1] F. Nakano and T. Sadahiro: Domino Tilings with One Diagonal Impurity., *Fundamenta Informaticae*, 査読有, 117.1 (2012): 249-264.
- [2] F. Nakano T. Sadahiro: “A generalization of carries processes and Eulerian numbers.” *Advances in Applied Mathematics*, 査読有, 53 (2014): 28-43.

[3] F. Nakano T. Sadahiro: “A. $(-\beta)$ -Expansion Associated to Sturmian Sequences.”, *Integers* 12 (2012): 571-599.

[4] F. Nakano T. Sadahiro: *Journal of Statistical Physics* 151.6 (2013): 1035-1055. “Hitting Matrix and Domino Tiling with Diagonal Impurities.”,

6. 研究組織

(1) 研究代表者

貞廣 泰造 (Sadahiro Taizo)

津田塾大学・学芸学部・准教授

研究者番号 : 00280454