

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 1 日現在

機関番号：32619

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540159

研究課題名(和文) グラフの因子と次数を制限した全域木の研究

研究課題名(英文) On graph factors and spanning trees with restricted degrees

## 研究代表者

松田 晴英 (Matsuda, Haruhide)

芝浦工業大学・工学部・教授

研究者番号：00333237

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：グラフの因子問題とは、与えられたグラフに対して、特定の性質をみたす全域部分グラフを見つけるという問題である。全域部分グラフとは、与えられたグラフのすべての点と一部の辺からなるグラフのことである。本研究の目的は、次の3点の成果を上げることである。

(1) グラフ全体でもつ構造がグラフの一部にもあり得るかを研究し、グラフの全体で知られている性質との関連性を追及していく。(2) グラフの木の構造を様々な角度から検証し、その存在定理の解決方法を提示する。(3) 上記2点の融合を提案し、新たなグラフの方向性を示す。これらについて、いくつかの成果が得られた。

研究成果の概要(英文)：A subgraph of a graph  $G$  is a graph if each of vertices belongs to the set of vertices in  $G$  and each of edges belongs to the edges in  $G$ . A factor of a graph is a spanning subgraph with some property. The main purposes of this research are the following : (1) We find mathematical structures in the specified subgraph of a graph, which is similar to those in the spanning subgraph of a graph. (2) We also find sufficient conditions for a graph to have some kinds of a tree in a graph. (3) We research trees with bounded degrees in the specified subgraph. For these purposes, some results are obtained in this research.

研究分野：グラフ理論

キーワード：離散数学 グラフ理論 因子 木

### 1. 研究開始当初の背景

グラフの因子問題とは、与えられたグラフに対して、特定の性質をみたす全域部分グラフを見つけるという問題である。全域部分グラフとは、与えられたグラフのすべての点と一部の辺からなるグラフのことである。グラフの因子理論は、グラフという概念が誕生した初期のころから長きに亘って研究され続けている歴史が長い分野のひとつであり、現在においても国内外で活発に研究されている重要課題である。例えば、過去にはアメリカの Vanderbilt University において、グラフの因子に特化した研究集会が開かれたことがあるほどである。また、これまでの経緯および現在の活発な研究状況から推測すると、グラフ因子は今後もグラフ理論の中心的課題のひとつとして研究されていくと思われる。この分野における最も大きな成果は、Tutte、Lovasz によって得られたグラフがある因子をもつための必要十分条件である。しかし、これらの結果には主に次の3つ(1) これら必要十分条件は、かなり複雑な評価式である。

(2) 与えられたグラフにおいて、指定した部分グラフに特定の性質をみたすグラフがあるか否かが一般には判定できない。

(3) 対象となる因子が、連結であるか否かが判定できない。

(1)の問題に対しては、グラフが所望の因子をもつための簡明な十分条件を得ることが近年の重要な研究課題であり、これまで私を含め、十数年の間に国内外の多くの研究者が多くの結果を出している。

(2)の問題に対しては、私の過去の研究で、グラフ因子の基本的構造ともいえるマッチングを自然に拡張した概念である奇次数部分グラフに対し、この奇次数部分グラフがグラフの一部分を覆うための必要十分条件を得ることができた。これはグラフ全体での結果をグラフの一部分へも自然に拡張できた萌芽的結果であり、グラフ全体がもつ様々な構造が部分グラフにもあり得るのではないかということに注目するきっかけとなった。実際、さらに研究を進めると、平成 13~14 年度には加納幹雄茨城大学教授と私との共同研究において、これまでに知られている多くの因子を包含する新たな因子を定義し、グラフがこの因子をもつための必要十分条件を得ることができた。この結果を掲載している論文は、その referee's report において、"The publication is strongly recommended."との評価を頂き、国際専門誌に掲載されている。これらにより、(2)の問題を部分的に解決している。

(3)の問題については重大とされながらも、これまであまり研究がなされていなかった。

### 2. 研究の目的

上記の学術的背景を踏まえ、本研究では、次の3点の成果を上げることである。

- (1) グラフ全体でもつ構造がグラフの一部にもあり得るかを研究し、グラフの全体で知られている性質との関連性を追及していく。
- (2) グラフの全域木の構造を様々な角度から検証し、その存在定理の解決方法を提示する。
- (3) 上記2点の融合を提案し、新たなグラフの方向性を示す。

### 3. 研究の方法

まずは、グラフの部分グラフや因子、ハミルトン閉路が存在するための十分条件について、既存の結果を調査した。次に、その研究が活発であるハミルトン閉路の存在で得られている十分条件について、これらが特定の性質をみたす部分グラフや因子、木にも適用できるか検討した。この際は研究代表者と研究分担者として、定期的にゼミを開催し、確実に研究が遂行できるよう工夫をした。この結果、ハミルトン閉路で得られている結果を自然に拡張する形で、部分グラフや因子、木について、いくつかの定理が得られた。また、これらは論文としてまとめて専門誌へ投稿したり、研究発表を行ったりした。

### 4. 研究成果

各点から出る辺の本数が制限されたグラフの木の構造に注目して、いくつかの結果が得られた。

研究目的(1)については、その構造が徐々に明らかとなりつつあったが、研究開始段階ではまだ、十分な解決には至っていなかった。特に、グラフに関して所望の構造があるか否かという課題は、グラフ全体であれば多くの性質が知られているにも関わらず、一部分に注目した結果は、最近になって活発化してきた研究であるため、解決すべき課題が多く残されている。そこで、本研究課題では、クローフリーというグラフの局所的な性質をもったグラフに対して、端点の個数を制限した木の存在と、分岐する辺の個数を制限した木の存在を示した。

主定理の概略は次のとおりである。

(i) クローグラフ  $G$  において、どの  $k+1$  個の独立した点から出る辺の合計数も  $|G|-k$  以上ならば、 $G$  には、端点の個数が  $k$  以下の全域木がある。

(ii) クローグラフ  $G$  において、どの  $2k+3$  個の独立した点から出る辺の合計数も  $|G|-2$  以上ならば、 $G$  には、各点から分岐する辺の個数が  $k$  以下の全域木がある。

研究目的(2)については、これまで、その構造の複雑さからほとんど研究がなされていなかったが、過去の私の研究において、各点から出る辺の本数が制限された木の構造に注目して、いくつかの結果を得ていた。しかし、これまでに得られた結果は、連結因子問題全体からみると未だ、特別な場合であり、これも交付希望期間内に一般化したいと考えていた。その結果、2部グラフにおいて、端点の個数を制限したグラフの存在を示し

た。その概要は次のとおりである。  
2部グラフ  $G$  において、2つの部集合からそれぞれ1点ずつ取り出し、その2点から出る辺の本数が十分大であるならば、 $G$  には、端点の個数が  $k$  以下の全域木がある。  
さらには、 $k$ -tree の存在について、Closure による条件を適用することができた。その概要は次のとおりである。  
グラフ  $G$  において、特定の2点を含む、どの独立な  $k$  点についても、その  $k$  点から出る辺の本数の合計数が  $|G|-1$  以上であるならば、 $G$  が全域  $k$ -tree をもつことと、 $G$  に特定の2点間に辺を加えたグラフに全域  $k$ -tree をもつことが同値である。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

1. Mikio Kano, Aung Kyaw, H. Matsuda, Kenta Ozeki, Akira Saito, Tomoki Yamashita, Spanning trees with a bounded number of leaves in a claw-free graph. *Ars Combinatoria*, 査読有, 103 (2012) 137-154.

2. Mikio Kano, H. Matsuda, Masao Tsugaki, Akira Saito, Guying Yang, Spanning  $k$ -ended Trees of Bipartite Graphs. *Discrete Mathematics*, 査読有, 313 (2013) 2903-2907.

3. H. Matsuda, Kenta Ozeki, Tomoki Yamashita, Spanning trees with a bounded number of branch vertices in a claw-free graph. *Graphs and Combinatorics*, 査読有, 30 (2014) 429-437.

4. R. Matsubara, M. Tsugaki, and T. Yamashita, Closure and spanning  $k$ -trees. *Graphs and Combinatorics*, 査読有, 30 (2014) 957-962.

[学会発表](計9件)

1. 松田晴英, On trees with constraints on the leaf degree, 離散数学とその応用研究集会 2011. (2011/08/03). 奈良県文化会館

2. 松原良太, leaf degree を制限した木について, 応用数学合同研究集会. (2011/12/16). 龍谷大学

3. 松田晴英, Spanning  $k$ -ended Trees of Bipartite Graphs, 応用数学合同研究集会. (2011/12/16). 龍谷大学

4. 松田晴英, Toughness and the existence of  $[a,b]$ -factors, 離散数学とその応用研究集会 2012. (2012/08/12). 茨城大学

5. 松田晴英, leaf degree を制限した木について, 日本数学会 2013 年度年会. (2012/03/20). 京都大学

6. 松田晴英, 松原良太, 松村初, leaf の個数を制限したグラフの spider について, 応用数学合同研究集会. (2013/12/20). 龍谷大学

7. 松原良太, Degree conditions for vertex-disjoint paths joining specified vertices in bipartite graphs, 離散数学とその応用研究集会 2014. (2014/08/21). 新潟総合テレビ

8. Haruhide Matsuda, Trees with constraints on the leaf degree, Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics 2014. (2014/05/14). 日本大学文理学部

9. Haruhide Matsuda, Sino-Japan symposium on Graph Theory, Combinatorics and their Applications. (2014/10/30). Chinese Academy of Sciences

[図書](計0件)

[産業財産権]  
出願状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計0件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等  
<http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/~hmatsuda/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松田 晴英 (MATSUDA, Haruhide)  
芝浦工業大学・工学部・教授  
研究者番号: 00333237

(2)研究分担者

松原 良太 (MATSUBARA, Ryota)  
芝浦工業大学・工学部・准教授  
研究者番号：70581685

(3)連携研究者

( )

研究者番号：