

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 21 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540160

研究課題名(和文) 合同な多面体による空間分割とケルヴィン予想

研究課題名(英文) Dividing the space into congruent polyhedral regions and the Kelvin's conjecture

研究代表者

奈良 知恵 (Nara, Chie)

東海大学・阿蘇教養教育センター・教授

研究者番号：40147898

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：3次元ユークリッド空間を等体積の領域に分割したとき、各領域の表面積の平均値を最小にする問題について、特に、領域が互いに合同な凸多面体の場合は、切頂八面体が最適解であるかとの予想(ケルビン予想の改訂版)について研究した。筆者たちの結果では、二重被覆直方体の凸単純展開図の中では、最適解であることが証明され、この結果は専門誌から出版された。また、凸多面体に関する周辺領域も研究し、2つの等体積立体間の変形可能性問題(ヒルベルトの第3問題に関連)や、凸多面体の連続的折りたたみの問題等について、多数の研究成果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：Divide the 3-dimensional Euclidean space into infinite regions with equal volume such that the average of surface area is minimal among such divisions. If regions are congruent each other and convex, the modified Kelvin's conjecture says that an optimal figure is a truncated octahedron. Our result says that such conclusion holds among the family of convex simple unfoldings of doubly-covered parallelepipeds. We studied in related topics such as the Hilbert's third problem on transformability among polyhedra with equal volume, and problems on continuous flattening of polyhedra, and we got many results.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：凸多面体 最小性 切頂八面体 多面体の変形可能性 連続的折り畳み 空間充填立体

1. 研究開始当初の背景

(1) 表面積最小化問題の1つである「3次元空間を等体積に分割して、各領域の表面積の平均値を最小にせよ」という問題に対して、1887年にケルビン(Kelvin)は切頂八面体(別称、アルキメデスの準正十四面体)を曲面にした形による合同分割が最適解であろうと予想した。しかし、この予想は1994年にフェラン(Phelan)とワイヤ(Waire)が、2種類の形による分割によって反例を見つけた。その後、複数種類による分割も挙げられたが、最小性に関しては未解決のままである。そこで、一般的に解決するのは困難に状況なので、適当な条件下に制限して研究する方法をとることにした。

(2) 2次元平面の場合は3次元と事情が全く異なる。等面積分割による周長の平均値の最小解は、正六角形であることが2001年にハレス(Hales)によって証明されている。

2. 研究の目的

(1) 本研究では「一種類の凸多面体による合同分割との条件下では、切頂八面体が最適解である」ことを予想し、研究した。切頂八面体は二重被覆直方体の3次元凸単純展開図(立体)の中では、表面積が最小になる。このような凸多面体の集合族を調べた。

(2) この問題を間接的にアタックするために、切頂八面体など3次元凸多面体に関する周辺領域の問題に取り組むことにした。具体的には、ヒルベルト(Hilbert)の第3問題に関連する等体積多面体の変形可能性問題、最近の研究領域である凸多面体の連続的折畳可能性問題、建築学では重要な多面体の剛性問題等にも取り組むことにした。

3. 研究の方法

(1) 国内外の研究集会での研究成果発表。離散計算・幾何学関係の国際研究集会、日本数学会年会や組合せ・グラフ理論の国内研究集会等での発表。

(2) 論文による研究成果の発表。離散・計算幾何学関係の専門誌をはじめ、研究集会のプロシーディング等に投稿し、発表する。

(3) 関連分野の研究者との交流。N. Dolbilin(ロシア)、E. Demaine(アメリカ)、J. O'Rourke(アメリカ)、K. Kato(京大)などとの共同研究を継続し、研究討論をする。また、我々自身では定期的にゼミを開催して、研究討論をする。直観幾何学の研究集会を継続して主催する。

(4) 関連分野の研究と社会貢献。化学や生物を専門とする研究者との共通な課題である「生物の形」について研究交流。多面体の剛性について建築学との共同研究の開発。

4. 研究成果

(1) ケルビン予想の改訂版。等体積の二重被覆直方体の凸多面体展開図の中では、切頂八面体が最も表面積が小さいことを証明し、その論文が *Periodica Math Hungarica* から出版された。

(2) 多面体の連続的折畳に関する問題。一連の研究成果を得ることができた。

正多面体について、折り目の連続的移動によって、自己交差なく平坦化にできることを証明した。この場合に「ひし形」のもつ特別な性質(折畳)の発見が証明のカギとなった。この結果は、ロシアの数学者 I. Sabitov の関心を惹くことになり、ヤロスロピリでの国際研究集会やペテルブルグのオイラー研究所での国際研究集会で発表し、プロシーディングに掲載もされた。

その後、C. Vilcu との共同研究が始まり、カット・ローカスという手法によって、任意の凸多面体が折り目の連続的移動によって平坦化できることを証明した。この場合は、移動する折り目が元の多面体の表面をほぼ全て被覆する。一方、最初の正多面体で用いた連続的折畳では、非常に小さな領域しか折り目が移動しない。ここに注目して、任意の四面体より一般的な三(四)角形ピラミッドなども、ひし形より一般的なタコ型(kite)の性質へと拡張することによって、連続的折畳を示した。この場合、最終段階の折畳はストレート・スケルトンの貼り合わせとなる。

(2) 多面体に関するストレート・スケルトンの貼り合わせに関する問題。A. Lubiw、E. Demaine、M. Demaine および J. O'Rourke が連続的折畳を見出す問題を提出していたので、彼らとの共同研究へと発展した。MITでの共同研究(H23年度)では、1つの面を元のままに保存(剛体と)して可能であるとの見通しを立てた。その後、Waterloo大学での共同研究(H25年度)を経て、主要部分が解決した。この成果はH26年6月の計算幾何学国際研究集会(SoCG 2014)での研究発表が受理されている。さらに副産物として、多面体の展開図の再折に関する論文がこれらの研究者との共著として専門誌から出版された。

(3) ヒルベルト(Hilbert)の問題「等体積の2つの多面体について、一方を有限個の断片に分割して再配置して、もう一方を構成できるか(変形可能か)」に関連する問題。どのような多面体のペアであれば、蝶番付で互いに変形可能であるかを調べた。そのようなペアの典型的な例は、ひし形十二面体(または切頂八面体)と直方体である。その他の既知の結果は平行多面体(parallelohedra)のある部分集合(秋山他)が知られているが、結果は非常に少ない。

この研究では、鏡映的空間充填立体の二重被覆の展開図間では、互いに変形可能であることを示した。

さらに、これらの多面体間が裏返し(reversible)可能性を持つための条件も示した。

(4) N. Nikolai との共同研究。平行多面体(parallelohedra)のアフィン同値類の代表元の幾何学的表現について、パラメトリックな方法を見出し、論文を発表した。

(5) 関連分野の研究者との交流。多面体の連続的折畳に関する我々の研究結果は、建築学が専門の研究者の注目を惹くことになり、建築学で重要な「剛性について」のワークショップや研究討論会で研究交流をした。これについては、さらなる実験、理論、数学的証明が今後の課題である。

(6) 社会活動。研究会「直観幾何学」を毎年2月に熊本大学にて開催し、多数の参加者による活発な研究交流の場となった。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7件)

Chie Nara, “Continuous flattening of some pyramids”, *Element der Mathematik*, 69 (2014), pp. 45-56. (査読有)

E. D. Demaine, M. L. Demaine, Jin-ichi Itoh, Anna Lebiw, Chie Nara, and Joseph O’Rourke, “Refold rigidity of convex polyhedra”, *Computational Geometry: Theory and Applications*, 46 (2013), pp. 979-989. (査読有)

Jin-ichi Itoh, Chie Nara, and Costin Vilcu, “Continuous flattening of convex polyhedra”, *Computational Geometry, EGC 2011 (Hurtado Festschrift: A. Marquez et al. (Eds.)), LNCS 7579*, Springer, 2012, pp. 85-97. (査読有)

伊藤仁一, 奈良知恵, 柴尾有星, 高木淳, 濱智大, 正多面体の再折り凸多面体, 熊本大学教育学部紀要, 61号, 自然科学, 2012年12月12日, pp. 65-74. (the Memoirs of the Faculty of Education, Kumamoto University,

No.61, Natural Science, December 12, 2012, pp. 65-74.) (査読有)

Jin-ichi Itoh, Chie Nara, “Continuous flattening of regular polyhedra”, *Computational Geometry LNCS 7033*, Springer, 2011, pp. 108-121. (査読有)

Nikolai Dolbilin, Jin-ichi Itoh, Chie Nara, “Affine equivalence classes of parallelohedra”, *Computational Geometry LNCS 7033*, Springer, 2011, pp.55-60. (査読有)

Jin-ichi Itoh, Chie Nara, “Unfoldings of doubly covered polyhedra and applications to space-fillers, *Periodica Mathematica Hungarica*, 63 (1) (2011), pp. 47-64. (査読有)

[学会発表](計 13件)

奈良知恵, 伊藤仁一, 変形および裏返し可能性 - 二重被覆多面体の展開図について -, 日本数学会春季総合分科会, 2014年3月15日, 学習院大学。

Chie Nara (joint work with Jin-ichi Itoh), “Continuous flattening of truncated tetrahedra”, Mexican Conference on Discrete Mathematics and Computational Geometry, Oaxaca, November 11-15, 2013.

Chie Nara (joint work with Jin-ichi Itoh), “Remarks on Reversibility of Unfoldings of Doubly-Covered Polyhedra”, JCDCGG 2013, Tokyo, September 17-18, 2013.

Chie Nara, “Transformability and Reversibility of Unfoldings of Doubly-Covered Polyhedra” 12th International Conference on Discrete Mathematics: Discrete Geometry and Alexandrov surfaces, Bucharest, September 7-11, 2013.

Jin-ichi Itoh, Chie Nara, Continuous flattening of polyhedra –from Platonic to Archimedean solids –, Thai-Japan joint conference on computational geometry and graphs, Srinakharinwirot university, Dec. 7, 2012.

Nikolai Dolbilin, Jin-ichi Itoh, Chie Nara, Affine classes of 3-dimensional parallelohedra –their parametrization and structure-, Thai-Japan joint conference on computational geometry

and graphs, Dec. 7, 2012, Srinakharinwirot university.

奈良知恵、伊藤仁一、E. Demaine, M. Demaine, A. Lebiw, J. O'Rourke, Refold rigidity of convex polyhedral, 日本数学会秋季総合分科会、2012年8月18日、九州大学伊都キャンパス。

Chie Nara, Continuous flattening of Archimedean polyhedra, Discrete geometry, August 13, 2012, Yaroslavl University.

奈良知恵、凸多面体の連続的折りたたみ - ストレートスケルトンの方法 - 、日本数学会春季総合分科会、2012年3月27日、東京理科大学。

Chie Nara, Continuous flat folding by the straight skeleton gluing, Japan conference on discrete and computational geometry, November 28, 2011, Tokai University, Yoyogi campus.

奈良知恵、伊藤仁一、正多面体の連続的な折りたたみによる平面化、日本数学会秋季総合分科会、2011年9月29日、信州大学松本キャンパス。

Chie Nara, Continuous foldings of convex polyhedra, workshop in algebraic combinatorics, September 17, 2011, 上海交通大学。

Jin-ichi Itoh, Chie Nara, Costin Vilcu, Continuous flattening of convex polyhedra, XIV Spanish meeting on computational geometry, June 28, 2011, Alcalá University.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

奈良 知恵 (NARA Chie)

東海大学・阿蘇教養教育センター・教授

研究者番号：40147898

(2) 研究分担者

伊藤仁一 (ITOHI Jin-ichi)

熊本大学・教育学部・教授

研究者番号：20193493