

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 10 日現在

機関番号：32644

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540161

研究課題名(和文) Bound graphとorder idealの関連について

研究課題名(英文) On relations of bound graphs and order ideals

研究代表者

土屋 守正 (Tsuchiya, Morimasa)

東海大学・理学部・教授

研究者番号：00188583

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円、(間接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、各種bound graphをclique coverとorder ideal, intervalの観点から研究した。極大元の集合及び、極小元の集合の性質の観点からの研究が有効であることがわかり、strict-semi-bound graphの性質が得られた。また、clique coverと関係した付加すべき孤立点の個数の観点からの研究である strict-double-bound numberの観点からの検討も行い、いくつかのgraphのクラスのstrict-double-bound numberを評価した。

研究成果の概要(英文)：We studied some kinds of bound graphs from the point of view of clique covers, order ideals and intervals. Using properties of sets of maximal elements and sets of minimal elements of posets, we obtain some properties of strict-semi-bound graphs. And we consider strict-double-bound numbers which are the number of isolated vertices with clique covers and estimate strict-double-bound numbers of some families of graphs.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般(含確率論・統計数学)

キーワード：応用数学 離散数学 グラフ理論

1. 研究開始当初の背景

Upper bound graph, double bound graph 等の bound graph は, poset の要素の上界間及び下界間の関係から構成されたグラフであり, J.E.Cohen により, 生態系を研究するために導入されたグラフである. 各種の bound graph の構造に対する clique cover の観点からの研究が, これまでに数多く行われてきた.

近年における T.A.McKee [Mc03], F.R.McMorris [McZa82], 土屋 [ErOgTs08] 等による bound graph の構造に関する研究では, bound graph の構造を clique cover の立場から研究している. これらの研究において graph の分解に付随する clique cover 間の性質が bound graph の構造を調べる際に重要な役割を果たしていることが分かった. また, clique cover に対応する order ideal の交差, すなわち, order ideal の共通部分の特徴を捉えることが bound graph を研究するとき有効であることも分かった. 特に, T.A.McKee [Mc89] の研究により, 交差の多重度を表現した upper bound multigraph の特徴を捉えることの有用性が分かった. さらに, poset の構造が vertex-clique incidence matrix によく反映されていることもわかった.

参考文献

[ErOgTs08] Hiroshi Era, Kenjiro Ogawa and Morimasa Tsuchiya, A note on some kinds of hereditary bound graphs, *Utilitas Mathematica* 77, 55-63 (2008).

[Mc03] T.A.McKee, Chordal bipartite, strongly chordal, and strongly chordal bipartite graphs, *Discrete Mathematics* 260, 231-238 (2003).

[Mc89] T.A.McKee, Upper bound multigraphs of posets, *Order*, 6, 265-275 (1989).

[McZa82] F.R.McMorris and T.Zaslavsky, Bound graphs of a partially ordered set, *Journal of Combinatorics, Information & System Sciences* 7, 134-138 (1982).

2. 研究の目的

本研究では, bound graph の分解に付随する各種 clique cover 間の関係を poset 上の order ideal の交差の多重度の観点から捉え, bound graph の構造を解明することを目的とする.

特に, upper bound graph および double bound graph の構造を clique cover に対応する order ideal による cover の関係の観点から捉えること, 特に order ideal の共通部分の大きさを限定するという観点から捉えることを

行い, upper bound graph 及び double bound graph の性質を order ideal による cover の立場から解明することを目的とする. また, この過程で共通部分の大きさの観点から研究されている p-competition graph の性質がどのように order ideal の交差の大きさを限定した場合の upper bound graph および double bound graph に反映するかを捉えることも目的とする.

3. 研究の方法

本研究では, bound graph の分解に付随する各種 clique cover 間の関係を, poset 上の order ideal の交差の多重度の観点から捉え, bound graph の構造を解明するために, まず, 交差を限定した場合の order ideal による分解を解析し, order ideal による分解の特徴を捉えることを行う. 次に, この解析によって得られた order ideal による分解の特徴と, order ideal の family の持つ階層構造を利用して, 各種 bound graph の構造を解明する. また, 解析においては, vertex-clique incidence matrix に対する最適化理論からの研究も行い, 各種の bound graph の計算機科学的性質を捉える. 以上の研究手法の下で,

(1): 松本及び松井が, 交差を限定した場合の order ideal による分解を解析し, order ideal の family の持つ階層構造との関係を解析する.

(2): 土屋は, order ideal による cover の立場から poset の cover を捉え, 各種の bound graph の性質を解明する.

(3): 松井及び土屋が(1)の解析結果と(2)で得られる order ideal の cover と poset 間の性質を利用して, 各種 bound graph の計算機科学的性質を調べる.

(4): 土屋は(1)~(3)の研究計画の進捗状況を把握し, 研究員間の成果, 意見の交流・統合を図る等の研究全般の統括を行い, 研究目的の達成を図る.

以上の研究活動のために

(1): 研究員各々が研究で得られた分析結果に対する発表を行い, 研究成果の客観的評価を仰ぐ.

(2): order ideal による分解に関する解析作業を集中的に行うために研究補助を利用する.

(3): 意見交換を通じて, 特に必要と感じられた研究者に, その専門知識を提供してもらう.

(4): 本研究で得られた研究成果は, その都度, 論文としてまとめ専門雑誌に投稿し, 研究成果および研究の方向性に関する客観的な意見等を求める.

4. 研究成果

strict-double-bound graph, upper bound graph および, p-competition graph の研究を中心に行った.

upper bound graph と double bound graph の中間に位置する semi bound graph を発展させた strict-semi-bound graph の性質も研究した.

Strict-semi-bound graph は strict-upper-bound graph や strict-double-bound graph に関する研究の場合とは異なり, strict-double-bound number 等の clique cover と関係した付加すべき孤立点の個数の観点からの研究よりは, 極大元の集合及び, 極小元の集合の性質の観点からの研究が有効であることがわかった.

Poset 上の極大元及び極小元は, order ideal と関係しており, 各種の bound graph の clique cover に関する別の視点からの研究であるといえる. この観点からの研究によって得られた strict-semi-bound graph の性質を用いて poset の連結性の判定に関する性質を得ることができた. すなわち, poset の連結性が, 極大元の集合(また, 極小元の集合)から生成される strict-semi-bound graph の誘導部分グラフの連結性で判定できることである.

また, これまでの研究を進展させ, spider graph 等の特殊な tree の loop, multiple arcs, symmetric arcs を含まない digraph に関する p-competition graph (共通部分の大きさの下限に制限のある competition graph) に関するいくつかの性質を clique cover の立場から捉えることができた.

Clique cover に対応する order ideal と interval の性質が, subposet への上界と下界の付加という poset 上の変換により捉えることの有効性が確認でき, strict-double-bound number を考えることによりグラフを定量的に捉えようとした. いくつかのグラフの strict-double-bound number に関する上界や下界を求めることが出来た.

すなわち, tree に関する strict-double-bound number の上界を評価することができた. 特に, 特殊な tree の一種である caterpillar $Cat_n(m, m, \dots, m)$ に関する strict-double-bound number に関して次のような評価を得ることができた.

$$(1) \lceil 2\sqrt{(nm-n+1)} \rceil \zeta(Cat_n(m, m, \dots, m)) \\ n \lceil 2\sqrt{m} \rceil - 2(n-1) \quad (n \geq 3)$$

$$(2) \lceil 2\sqrt{(m-1)} \rceil \zeta(Cat_2(m, m)) \\ \lceil 2\sqrt{(m-1)} \rceil + 1 \quad (m \geq 2)$$

また, 完全グラフより規則性の高いグラフを除くことによって得られるグラフに対して

strict-double-bound number に関する研究を行い, いくつかのグラフに関してその strict-double-bound number を決定した.

- (1) $\zeta(K_n-E(K_m)) = \lceil 2\sqrt{m} \rceil (2m - n - 1)$
- (2) $\zeta(K_n-E(K_m\text{-pan})) = \lceil 2\sqrt{(m-1)} \rceil + 1$
($2m - n - 2$)
- (3) $\zeta(K_n-E(K_{1,m})) = 3(1m - n - 2)$
- (4) $\zeta(K_n-E(C_5)) = 5(n - 5)$
- (5) $\zeta(K_n-E(C_6)) = 6(n - 6)$
- (6) $\zeta(K_n-E(C_7)) = 7(n - 7)$
- (7) $\zeta(K_n-E(C_8)) = 7(n - 8)$
- (8) $\zeta(K_n-E(C_m)) = (m+5)/2 + 1$
($n - m - 9$ m:odd)
- (9) $\zeta(K_n-E(C_m)) = (m+2)/2 + 1$
($n - m - 10$ m:even)

さらに, グラフ間の演算, 特に, 二つのグラフの積に関する観点からの研究を行った. 任意のグラフと n 個の孤立点からなるグラフの積によって得られるグラフに関する strict-double-bound number を poset の order ideal および interval の組み合わせによる変形の観点から評価した. その結果を応用して, split graph の strict-double-bound number を評価することができた.

また, 切断点を持つグラフをグラフの分裂と同一視の観点から捉え, これらの演算に対応する poset 上の演算を考え, その演算を order ideal, interval との関係から捉えた. その結果, 切断点を持つグラフの strict-double-bound number を部分グラフの strict-double-bound number から評価することができた. この結果は, ブロック分解と各ブロックの strict-double-bound number によりグラフ全体の評価が可能であることを意味している.

いずれも主に上界からの評価であるが, グラフの分解と poset の order ideal の関係からの評価である.

これらの研究成果は, 国際会議等の国内外の研究集会, 専門分野の研究ジャーナルを通じて公表した. また, いくつかの研究成果は, 論文としてまとめ専門分野のジャーナルへの投稿の準備をしている.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

- (1) Kenjiro Ogawa, Keisuke Kanada, Kanosa Kushima, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *On strict-double-bound numbers of complete graphs missing four edges*, Bulletin of the Institute of Combinatorics and its Applications, 査読有, 68 (2013), 79-89.
- (2) Syota Konishi, Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *On strict-double-bound numbers of spiders and ladders*, Ars Combinatorica, 査読有, 108 (2013), 249-255.
- (3) Shota Konishi, Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *Note on strict-double-bound numbers of paths, cycles, and wheels*, JCMCC, 査読有, 83 (2012), 205-210.
- (4) Kenjiro Ogawa, Ryoko Soejima, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *Note on strict-double-bound numbers of nearly complete graphs missing some edges*, Discrete Mathematics, 査読有, 312 (2012), 584-587.
- (5) Masaki Yamamoto, Shuji Kijima, Yasuko Matsui, *A polynomial-time perfect sampler for the Q-Ising with a vertex-independent noise*, Journal of Combinatorial Optimization, 査読有, 22 (2011), 3, 392-408.

[学会発表](計 14 件)

- (1) 後藤佳弘, 池田一孝, 土屋守正, *グラフ演算と sDB グラフについて*, 応用数学合同研究集会, 2013/12/21 (龍谷大学)
- (2) 川谷元, 土屋守正, *Upper-bound graph について*, 応用数学合同研究集会, 2013/12/20 (龍谷大学)
- (3) Gen Kawatani, Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *On strict-double-bound numbers of graphs and graph operations*, The 25-th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama, 2013/11/20

(横浜国立大学)

- (4) Morimasa Tsuchiya, Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, *On strict-semi-bound graphs of posets*, Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, 2013/7/9 (スロバキア, コシチエ)
- (5) 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋守正, *Strict-semi-bound graph について*, 日本数学会, 2013/3/20 (京都大学)
- (6) Kyohei Nakada, Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *On p-competition graphs and spider graphs*, 4th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2012/11/27 (米国, ハワイ)
- (7) Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *On strict-semi-bound graphs of posets*, 4th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2012/11/27 (米国, ハワイ)
- (8) Yuhei Shiraki, Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *On strict-double-bound numbers of trees*, 4th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2012/11/27 (米国, ハワイ)
- (9) Gen Kawatani, Yoshihiro Goto, Kenjiro Ogawa, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya, *On strict-double-bound numbers of graphs and graph operations*, 4th Pacific Workshop on Discrete Mathematics, 2012/11/27 (米国, ハワイ)
- (10) Morimasa Tsuchiya, Kenjiro Ogawa, Keisuke Kanada, Shota Konishi, Kanosa Kushima, Satoshi Tagusari, *On strict-double-bound numbers of spiders, ladders, and pans*, Combinatorics 2012, 2012/9/10 (イタリア, ペルージャ)
- (11) 仲田京平, 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋守正, *Double Star の p-competition number について*, 第 23 回位相幾何学的グラフ理論研究集

会, 2011/11/26 (横浜国立大学)

(12)白木由平, 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋守正,

Double Star の strict-DB number について,

第23回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 2011/11/26 (横浜国立大学)

(13)金田圭介, 串間花乃咲, 小川健次郎, 田鎖聡史, 土屋守正,

4 辺除去をした完全グラフの sDB number について,

日本数学会 2011/9/28 (信州大学)

(14)Kenjiro Ogawa, Keisuke Kanada, Kanosa Kushima, Satoshi Tagusari, Morimasa Tsuchiya,

On strict-double-bound numbers of complete graphs missing four edges,

23rd British Combinatorial Conference, 2011/7/4 (英国, University of Exeter)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

○出願状況(計 0 件)

○取得状況(計 0 件)

〔その他〕特になし

6. 研究組織

(1)研究代表者

土屋 守正

(TSUCHIYA MORIMASA)

東海大学・理学部・教授

研究者番号: 00188583

(2)研究分担者

松井 泰子

(MATSUI YASUKO)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号: 10264582

松本 哲志

(MATSUMOTO SATOSHI)

東海大学・理学部・准教授

研究者番号: 30307235

(3)連携研究者

なし