様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ８ 月　 ６ 日現在

機関番号：３２７０２
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１６７
研究課題名（和文）巨大基数を指向しないＰκλ上のイデアル論

研究課題名（英文）Ideals on P\kappa\lambda which does not depend on large cardinals

研究代表者
阿部　吉弘（Abe, Yoshihiro）

神奈川大学・理学部・教授

研究者番号：１０１５９４５２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　2,300,000円、（間接経費）　690,000円

研究成果の概要（和文）：Pκλ上のイデアルの構造理論の土台となる P-point, Q-point, selective イデアルの概念を定式化し、いくつかの定理を証明した。それらには、κ上のイデアルと同じく成り立つものと、大きく異なるものがある。また、κ上の場合が、λ＝κという特殊事情によるものだったことを示唆する事実も得られた。
κが超コンパクト基数のとき、Pκλのstationary set は reflect することが知られていたが、κが強コンパクトで reflect しない stationary set が存在する強制モデルを構成した。

研究成果の概要（英文）：The basic concepts of the structural theory of ideals on P_{\kappa}\lambda, P-points, Q-points, and selective ideals are defined, and several theorems are proved, some of which hold similarly for ideals on \kappa, whereas the others are very different from those on \kappa. We get several facts which says that some theorems on \kappa result from the special situation that \kappa=\lambda.
It has been long known that the stationary sets of P_{\kappa}\lambda reflects when \kappa is supercompact. We construct a forcing model in which \kappa is strongly compact and P_{\kappa}\lambda has a stationary set without such reflection.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：Pκλ　イデアル　unbounded set　Rudin-Keisler ordering　P-point　Q-point　selective ideal　弱正規イデアル

１．研究開始当初の背景

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ という集合は巨大基数との関連で、40年に渡り活発に研究されてきた。代表者は特に組合せ論的性質に集中し、ほとんど解明するに至った。残された問題は強コンパクト基数に関するものだが、超コンパクト基数に関連する組合せ論と異なり、イデアルの正規性を仮定できず、より深く $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の構造を理解する必要を痛感した。また、巨大基数がない場合の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の構造はほとんど研究されてこなかった。

２．研究の目的

巨大基数の存在を仮定せず、$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の性質を調べる。特に、イデアルの構造論的性質（structural property）を軸に、非正規イデアルの振る舞いを明らかにする。

正則基数 κ 上のイデアルの構造論的性質は, Baumgartner-Wagon (1982) による詳細な研究が知られている。$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルは Jech (1973) で κ 上のアナロジーとして定義された後、多くの研究が行われてきた。しかし、構造論的性質だけは、何一つ実りある結果が得られていない。むしろ、理論展開すらできない状況が続いてきた。

$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ についての新しい知見が得られれば、構造論的性質の理論構築に生かし、それを $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ へフィードバックして理解を深めることを狙う。

３．研究の方法

本研究では、Rudin-Keisler 順序の観点から基本概念である P-point、Q-point、selective ideal を定義し $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの構造理論を展開する。先述の Baumgartner-Wagon で明らかにされた κ 上の諸事実と対比させて、研究を進めていった。

４．研究成果

部分的とは言え $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの構造理論を展開することに成功した。

正則基数 κ と基数 $\lambda \geq \kappa$ に対して, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ は濃度が κ より小さい λ の部分集合の族 $\{x : x \subset \lambda,\ |x| < \kappa\}$ である。

定義 0.1. $X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする。
X は *unbounded* $\Leftrightarrow$ 任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し $x \subset y$ を満たす $y \in X$ が存在する。
$\{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : X$ は unbounded ではない $\}$ を the *bounded ideal* と言い、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ で表す。
X は *closed* $\Leftrightarrow$ X は κ より短い長さの $\subset$-increasing sequence について閉じている。
X は *club* $\Leftrightarrow$ X は closed かつ unbounded。
X は *stationary* $\Leftrightarrow$ X は任意の club と共通部分をもつ。$\{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : X$ は stationary ではない $\}$ を the *nonstationary ideal* と言い、$\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}$ で表す。

定義 0.2. I は次の条件 (1) $\sim$ (5) を満たすときイデアルと言う。

1. $I \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda)$、
2. $\emptyset \in I$ かつ $\mathcal{P}_\kappa\lambda \notin I$、
3. $X \subset Y \in I$ ならば、$X \in I$、
4. κ 個より少ない I のメンバーの和集合は、I のメンバーである (κ 完備)、,
5. $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \subset I$ (fine)。

I positive set $I^+ = \mathcal{P}(\mathcal{P}_\kappa\lambda) \setminus I$、$I$ の双対フィルター $I^* = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : \mathcal{P}_\kappa\lambda \setminus X \in I\}$ とする。$X \in I^+$ に対し $I|X = \{Y \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : Y \cap X \in I\}$ は I より大きいイデアルで、X はその双対フィルターのメンバーである。
写像 $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \lambda$ が *regressive* $\Leftrightarrow$ 任意の空でない $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し $f(x) \in x$。
$\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアル I が 正規 $\Leftrightarrow$ 任意の $X \in I^+$ と regressive 写像 $f : X \to \lambda$ に対し、$\{x \in X : f(x) = \gamma\} \in I^+$ である $\gamma < \lambda$ が存在する。
I は 弱正規 $\Leftrightarrow$ 任意の $X \in I^+$ と regressive 写像 $f : X \to \lambda$ に対し、$\{x \in X : f(x) < \gamma\} \in I^+$ である $\gamma < \lambda$ が存在する。

定義から、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の最小なイデアルで、$\mathrm{NS}_{\kappa,\lambda}$ は最小の正規イデアルであることが分かる。

また、κ 上の bounded ideal $\mathrm{I}_\kappa = \mathrm{I}_{\kappa,\kappa}$, non-stationary ideal $\mathrm{NS}_\kappa = \mathrm{NS}_{\kappa,\kappa}$ である。

$\lambda > \kappa$ の場合、$\lambda = \kappa$ のときと次の点で異なり、状況を困難にしている。

1. 「$X \in \mathrm{I}_\kappa$ と $|X| < \kappa$ は同値」であるが、「$X \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ で $|X| = |\mathcal{P}_\kappa\lambda|$ なものが存在する」
2. 「任意の $f : \kappa \to \kappa$ と $X \in \mathrm{I}_\kappa$ に対し、$f[X] \in \mathrm{I}_\kappa$」であるが、「ある $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ と $X \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ に対し、$f[X] \notin \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$」である。(ここで $f[X] = \{f(x) : x \in X\}$ とする。)

定義 0.3. I は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルで $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ とする。
(1) f は *I-fine* $\iff$ 全ての $\alpha < \lambda$ に対し、$\{x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda : \alpha \notin f(x)\} \in I$。
(2) I は *P-point* $\iff$ 任意の I-fine 写像 f に対し、$X \in I^*$ で任意の $\alpha < \lambda$ について $\{x \in X : \alpha \notin f(x)\} \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ を満たすものが存在する。
(3) I は *Q-point* $\iff$ どんな $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$-fine 写像も、ある I^* のメンバー上で 1 対 1 になっている。
(4) I は *selective* $\iff$ 任意の I-fine 写像が I^* のメンバー上で 1 対 1 になっている。
(5) $f_*(I) = \{X \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda : f^{-1}(X) \in I\}$.
(6) ふたつのイデアル I と J は 同型 ($I \cong J$ で表す) $\iff$ ある全単射 $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ があり、$J = f_*(I)$ 。

定義から直ちに次のことが分かる。

事実 0.4. (1) $f_*(I)$ はイデアル $\iff$ f は I-fine。
(2) 全ての正規イデアルは P-point である。
(3) I は selective $\iff$ I は P-point かつ Q-point.
(4) f は $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$-fine $\iff$ 任意の $X \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ に対し $f^{-1}(X) \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ $\iff$ 任意の $X \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$ に対し $f[X] \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$。

§1 The bounded ideal

もちろん $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ は P-point である。
以下に $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ について明らかにしたこと (b) を、I_κ に関すること (a) と対比させて記す。

命題 1.1. (*a*) $f_*(\mathrm{I}_\kappa) = \mathrm{I}_\kappa|f[\kappa]$
(*b*) − (1) 各 $X \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda} \setminus \mathrm{I}^*_{\kappa,\lambda}$ に対して、$f_*(\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}) = \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|X \neq \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|f[\mathcal{P}_\kappa\lambda]$ である $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$-fine 写像 f がある。
(*b*) − (2) f が $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$-fine 写像で任意の $X \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ に対して $f[X] \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ ならば、任意の $Y \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$ に対して、$f_*(\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|Y) = \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|f[Y]$ が成り立つ。

注意：全ての $f : \kappa \to \kappa$ と $X \in \mathrm{I}_\kappa$ に対し、$f[X] \in \mathrm{I}_\kappa$ である。したがって、(a) は (b)-(2) に当たる。

命題 1.2. (*a*) $I \neq \mathrm{I}_\kappa|A$ で I-fine な f が $X \in I^*$ 上で 1 対 1 ならば、$I \cong f_*(I)$、つまり、全単射 $g : \kappa \to \kappa$ があって $f_*(I) = g_*(I)$。
(*b*) I-fine な $f : \mathcal{P}_\kappa\lambda \to \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が $A \in I^*$ 上で 1対1で、$|X| = \lambda^{<\kappa}$ または $|X| = |\mathcal{P}_\kappa\lambda \setminus A|$ である $X \in \mathcal{P}(A) \cap I$ が存在すれば、$I \cong f_*(I)$ である。

命題 1.3. (*a*) I_κ は他のイデアルと同型ではない。
(*b*) 全ての $X \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda}$ の濃度が $\lambda^{<\kappa}$ ならば、$\mathrm{I}_{\kappa,\lambda} \cong J$ となる $J \neq \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ が存在する。

次の問題は未解決である。

問題 1.4. $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ と $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}|A$ が同型であるような $A \in \mathrm{I}^+_{\kappa,\lambda} \setminus \mathrm{I}^*_{\kappa,\lambda}$ は存在するか?

定義 1.5. I が *weak Q-point* $\iff$ 任意の $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$-fine な f と $X \in I^+$ に対し $f|Y$ が 1対1である $Y \in \mathcal{P}(X) \cap I^+$ が存在する。
I が *nowhere Q-point* $\iff$ どんな $X \in I^+$ に対しても、$I|X$ は Q-point ではない。

命題 1.6. (*a*) I_κ は weak Q-point だが、

nowhere Q-point である。

(b) $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ は weak Q-point だが、nowhere Q-point である

§2. 弱正規性と selective イデアル

κ 上のイデアルに関しては、弱正規性と正規性は一致している。また、$\mathrm{NS}_\kappa \subset I$ ならば、sup-関数はある $X \in I^*$ 上で 1 対 1 である。次の補題は、本質的には Menas による。

補題 2.1. $\mathrm{cof}(\lambda) \geq \kappa$ で、I は $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の弱正規イデアル、f は $\mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$-fine、任意の $X \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ に対し $f[X] \in \mathrm{I}_{\kappa,\lambda}$ とする。このとき、$S \in I^*$ で、そのメンバー x, y が $f(x) = f(y)$ を満たせば $\sup(x) = \sup(y)$ になっているものが存在する。

次の系の (b) は (a) の自然な拡張になっている。

系 2.2. (a) – (1) NS_κ より大きいイデアルは Q-point である。

(a) – (2) 正規イデアルは selective である。

(b) I が $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上の弱正規イデアルで、$\sup|X$ が 1 対 1 であるような $X \in I^*$ が存在するならば、I は selective である。

§3. Stationary reflection と 強コンパクト基数

弱コンパクト基数の $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ でのアナロジーとして, 超コンパクト基数と強コンパクト基数がある。超コンパクト基数は強制法、内部モデル論、及び決定性公理との関係で非常に重要な巨大基数であり、強コンパクト基数は謎めいた性質により、研究者を引きつけてきた。

定義 3.1. κ が λ 超コンパクト $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上に正規極大フィルターが存在する。
κ が λ 強コンパクト $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上に fine 極大フィルターが存在する。

定義から、超コンパクト基数は強コンパクトであるが、逆は証明できないことが知られている。

超コンパクト基数は次の性質をもつ：

事実 3.2. κ が λ 超コンパクトで $S \subset \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が stationary ならば、$S \cap \mathcal{P}_{x\cap\kappa}x$ が $\mathcal{P}_{x\cap\kappa}x$ で stationary な $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ が存在する。(ここで、$\mathcal{P}_{x\cap\kappa}x = \{s \subset x : |s| < |x \cap \kappa|\}$ である。)

上記の stationary reflection が、強コンパクト基数についても成り立つかは、長年未解決のままであったが、今回の助成研究で、否定的な解答を得た。

命題 3.3. 超コンパクト基数が存在するならば、次のような強制モデルを構成できる：

> κ は強コンパクトで、任意の $x \in \mathcal{P}_\kappa\lambda$ に対し $S \cap \mathcal{P}_{x\cap\kappa}x$ が stationary ではない $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の stationary set S が存在する。

５．主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 10 件)

[1] Toshimichi Usuba, Splitting stationary sets in $\mathcal{P}(\lambda)$, Journal of Symbolic Logic 77 (2012), 49-62.

[2] Yoshihiro Abe, Toshimichi Usuba, Notes on the partition property of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, Archive for Mathematical Logic 51 (2012), 575-589.

[3] Toshimichi Usuba, Notes on Miyamoto's forcing axioms, 数理解析研究所講究録 1790 (2012), 60-64.

[4] 藤田博司, 薄葉季路, 現代集合論における巨大基数, 科学基礎論研究 39 (2012), 33-42.

[5] Toshimichi Usuba, Hierarchies of ineffabilities, Mathematical Logic Quarterly 59 (2013), 230-237.

[6] Toshimichi Usuba, Characters of countably tight spaces and inaccessible cardinals, Topology and its applications 161 (2014), 95-106.

[7] Pierre Matet, Toshimichi Usuba, Two-cardinal version of weak compactness: partition of triples, Journal of Mathematical Society of Japan, in Press.

[8] Toshimichi Usuba, Bounded daggar principles, Mathematical Logic Quarterly, in Press.

[9] Joan Bagaria, Joel Hamkins, Konstantinos Tsapronis, Toshimichi Usuba, Superstrong and strong cardinals are never indestructible, Archive for mathematical Logic, to appear.

[10] Toshimichi Usuba, The approximation property and the chain condition, 数理解析研究所講究録 1895 (2014), 103-107.

〔学会発表〕（計 15 件）

[1] 薄葉季路, 吉信康夫, 強制法のもとでの被覆の性質の保存について, 第 46 回位相空間論シンポジウム, 静岡大学 (2011 年 6 月 3 日)

[2] 薄葉季路, 巨大基数と現代集合論, 科学基礎論学会 2011 年度総会, 愛媛大学 (2011 年 6 月 5 日)

[3] 阿部吉弘, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ の embedding について, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 信州大学 (2011 年 9 月 28 日)

[4] 薄葉季路, 吉信康夫, 強制法と被覆の性質について, 日本数学会 2011 年度秋季総合分科会, 信州大学 (2011 年 9 月 28 日)

[5] Toshimichi Usuba, Skinny sets and the non-stationary idal over $\mathcal{P}_\kappa\lambda$, Aspects of Discriptive set theory, 京都大学 (2011 年 10 月 20 日)

[6] Toshimichi Usuba, Small semiproper posets, FWF/JSPS joint seminar on Forcing and Set Theory, 神戸大学 (2012 年 1 月 28 日)

[7] 薄葉季路, Games on complete Boolean algebras, 日本数学会 2012 年度年会, 東京理科大学 (2012 年 3 月 27 日)

[8] 薄葉季路, Large cardinals and indescructible Lindelöf spaces, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 九州大学 (2012 年 9 月 20 日)

[9] 阿部吉弘, $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ 上のイデアルの制限された structural properties と弱い正規性, 日本数学会 2012 年度秋季総合分科会, 九州大学 (2012 年 9 月 21 日)

[10] 薄葉季路, Partial stationary reflection principles, Forcing extensions and large cardinals, 京都大学 (2012 年 12 月 5 日)

[11] 薄葉季路, Large cardinals and indestructible countably tight spaces, 日本数学会 2013 年度年会, 京都大学 (2013 年 3 月 21 日)

[12] Toshimichi Usuba, Saturation of definable ideals, Logic Colloquium 2013, Erora University, Portugal (2013 年 7 月 24 日)

[13] Toshimichi Usuba, Superdestructibility of extendible cardinals, Reflection principles and set theory of large cardinals, 京都大学 (2013 年 9 月 11 日)

[14] Toshimichi Usuba, Superstrong and other large cardinals are not Laver indestructible, The 13th Asian Logic Conference, 中山大学, 中国 (2013 年 9 月 18 日)

[15] 阿部吉弘, Unbounded sets of $\mathcal{P}_\kappa\lambda$ with cardinality $< \lambda^{<\kappa}$, 日本数学会 2013 年度秋季総合分科会, 愛媛大学 (2013 年 9 月 27 日)

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：
○取得状況（計 0 件）
名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等
　該当無し

６．研究組織
(1) 研究代表者
　阿部　吉弘　（ Abe, Yoshihiro ）
　神奈川大学・理学部・教授
研究者番号：１０１５９４５２

(2) 研究分担者
　薄葉　季路　（ Usuba, Toshimichi ）
　神戸大学・自然科学系・助教
研究者番号：１０５１３６３２

(3) 連携研究者
　加茂　静夫　（ Kamo, Shizuo ）
　大阪府立大学・理学部・名誉教授
研究者番号：３０１２８７６４

　塩谷　真弘　（ Shioya, Masahiro ）
　筑波大学・数理物質系・准教授
研究者番号：３０２５１０２８