様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ５ 月　 １ 日現在

機関番号：３４３０４
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０１７０

研究課題名（和文）相互帰納的フラクタルのマルチフラクタル分解の研究

研究課題名（英文）Research on the multifractal decompositions of mutual-recursive sets

研究代表者
辻井　芳樹（TSUJII, Yoshiki）

京都産業大学・理学部・教授

研究者番号：９００６５８７１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,100,000円、（間接経費）　　630,000円

研究成果の概要（和文）：複数個の縮小相似写像から定まるフラクタルを考える。そのフラクタル上にその写像に付随して定まる２つの測度を考え、フラクタルをこの２つの測度の密度によって分解（マルチフラクタル分解）する。２つのパラメータ(q,s)をもつ確率測度を導入することで、マルチフラクタル分解の分解要素ごとのハウスドルフ次元を与えた。更に、この分解のスピングラス現象に対する考察と、関連するゲージ普遍性を示した。また相互帰納的フラクタルに対しても同様の結果が成り立つことを示した。

研究成果の概要（英文）：On the fractal set defined by a system of contraction similarities, we consider two probability measures induced by these contractions. The multifractal decompositions of the fractal with respect to these probability densities are investigated and the Hausdorff dimensions of these decompositions are given. For that purpose we introduced a probability measure with two parameters (q,s). Furthermore we studied the spin-glass phenomena of multifractal structures and the related gauge-invariance. We extend these results to mutual-recursive sets.

研究分野：数理系科学

科研費の分科・細目：数学、数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：数理モデル　確率論　フラクタル　マルチフラクタル　スピングラス

１．研究開始当初の背景

(1)不連続な関数のクラスに属するもので、Fine 連続かつ Fine 局所一様連続で無い関数として Brattka 関数がある。そのグラフは無限個の縮小写像の不変集合として特徴付けられる。更にグラフは相互帰納的フラクタルの性質を持つことを 2009 年の研究代表者達の論文で指摘した。当研究は、フラクタルと関数の計算可能性が関連を持つことを背景に進められている。

(2)有限個の縮小写像から定まるフラクタル上に縮小写像に付随して定まる測度を考え、その密度を変数としてフラクタルを分解することをマルチフラクタル分解という。更にもう一つの測度を考えて、同時密度に関するマルチフラクタル分解を考察するのは自然である。

(3)Cawley-Mauldin(1992)において指摘されたマルチフラクタルのスピングラス現象は応用の観点からも興味深い。この微妙な現象を解析する。

２．研究の目的

研究の背景で述べたように、有限個および無限個の縮小写像の不変集合、さらに相互帰納的不変集合を対象とする。

(1)有限個の縮小写像の不変集合上の 2 つの測度に対するマルチフラクタル分解と、その各要素のハウスドルフ次元の解析を目的とする。２つの測度を扱うため結合分布が対象となる。フラクタル次元を解析するためには、結合分布に付随した補助的な確率を定めることが必要である。どのような補助的な確率が自然なものかが問題となる。

(2)上記の解析を相互帰納的不変集合に拡げる。どのような一般化が必要か、興味がもたれる。相互帰納的不変集合へのマルチフラクタル解析は、それらがマルコフ性を持つ事実を使って補助的確率測度の族を構成することにより実行する。

(3)（1）のケースで、Cawley-Mauldin に示唆されているマルチフラクタル分解によるハウスドルフ次元にスピングラス現象が現れる例の検証を行う。スピン現象が現れるためにはある種の制約（ジレンマ）が必要である。Cawley-Mauldin 達は“重み”を導入して数値実験を行っている。この研究では彼らの定式化を一般化してスピン現象を考察したい。

(4)上記に関連して、Cawley-Mauldin に示唆されているゲージ不変性をパラメータが 2 個の場合に拡張する。パラメータが 2 個となることから、変換の自由度は１個減りゲージ不変性は制限されたものとなる。

３．研究の方法

(1)有限個の縮小写像から定まる不変集合（フラクタル）に対して２つの測度を考える。その密度に関するマルチフラクタル分解を扱うために、パラメータも 2 つに拡張するのが自然である。このパラメータ（q，s）と２つの測度の指数（α，γ）との関係を考察する。パラメータが１個 q だけの場合は指数αとの関係はルジャンドル変換で結ばれている。この事実の拡張を実行する。

(2) Cawley-Mauldin は、上記のパラメータ s が定数１の場合に、マルチフラクタル分解によるハウスドルフ次元にスピングラス現象が現れる例を与えている。我々はパラメータ s にも自由性があるので広いクラスの現象に触れることが出来る。この s に関する制約により、スピン現象の数値実験の可能性が広がる。

(3)相互帰納的不変集合の場合に上記(1) と同じ展開を試みる。導入するパラメータ（q, s）に対応した測度をどのように定めるのが適当なのかが、キーポイントになる。

４．研究成果

研究目的および方法に沿って以下の成果をあげた。

(1)分解要素のハウスドルフ次元を特徴づけるために，パラメータの対（q，s）を導入した。このパラメータの対を使ってハウスドルフ次元の公式を表すことが出来る。２つの測度に対して、指数（α，γ）の結合密度をもつ集合のハウスドルフ次元評価は、パラメータ (q, s) 測度を使って得られる。(α，γ) と(q，s)の関係はルジャンドル変換で結ばれている。このルジャンドル変換は 2 変数対 2 変数の変換である。考察している(q，s)を独立変数とする関数は広義の凸関数であるため、２つのパラメータ（α，γ）と(q，s)は一般に１対１ではない。しかしルジャンドル変換された関数はパラメータ(q，s)の取り方に寄らず一意的に定まることが保障される。また、この拡張はマルチフラクタル構造のスピングラス現象を解析するための自由性を与える。

(2)上記のパラメータ q を固定してαの関数としてハウスドルフ次元を見ると、スピングラス現象を示すものがある。この研究では縮小写像の個数と、ハウスドルフ次元のグラフの谷の数の関係をシミュレーションを使って考察した。縮小写像の個数を n とすると、n－1個の谷を持つ例を n=5 まで作ることが出来る。これらの縮小写像に付随する 2 つの確率の選び方は微妙で少し数値を変えると、谷が出来ないという結果になる。この仕組みの研究は新たな課題としたい。

(3)1 つの確率測度に関する密度指数αが取りうる値の範囲は、解析的に明示される。我々の結合密度の指数（α，γ）に関して、それらが取りうる平面の値の範囲を明示的に表現するのは困難である。ここでは数値実験の結果を与えている。将来この解析を行うことは興味深い。2 変数ルジャンドル変換の問題の一部である。

(4)Cawley-Mauldin はαに関するゲージ普遍性を扱っている。我々はゲージ不変性を、2 つのパラメータ（α，γ）をもつ場合に拡張した。彼らは 2 つの測度のうち、1 つは確率測度、もう 1 つの測度は確率測度という条件を外しているため、2 つのパラメータ(a, b)を有するゲージ変換を導入している。我々の定式化では 2 つの測度が共に確率測度のため、パラメータの自由度が 1 個に制限される。そのような定式化のもとでゲージ不変性を示した。

(5)相互帰納的不変集合に対しても、結果(1)で述べた事実が成立することを示した。そのために，パラメータ(q, s)をもつ測度の族を導入したが，結果としては自然な定式化が成り立った。相互帰納的不変集合はマルコフ性を有する。このマルコフ性を利用することで、パラメータ(q, s)をもつ相互帰納的な確率測度の族が構成され、これから求める結果が得られた。自然な拡張として証明の道筋が作られた。

(6)縮小写像の族から定まる相互帰納的不変集合は、そのハウスドルフ次元が解析的に表現できる最も一般的なクラスと考えられる。更に、ハウスドルフ次元を越えてマルチフラクタル分解も解析が許される。この研究ではマルチフラクタル分解をパラメータが 2 個（α，γ）の場合を扱っている。このパラメータの個数は表現を簡単にするための制限であり、m 個のパラメータ（α_1, α_2, …, α_m）に拡張出来る。対応する補助の確率はパラメータ（q_1, q_2, …, q_m）をもつことが要請される。以上から相互帰納的不変集合は明示的解析が許されるクラスであることが再度確認された。多くの応用に、相互帰納的不変集合が適用されることが期待される。

(7)森・辻井・八杉の論文「Computability of Probability Distributions and Characteristic Functions」は確率分布とその特性関数の計算可能性を調べたものである。本研究の発端に関連した研究である。確率分布の実効的（計算可能な）性質の研究として、次のことを示した。確率分布の列｛μ_n｝の計算可能性は、対応する特性関数列の計算可能性と一致する。また収束に関しては実効的 Glivenko の定理が成立する。更に Bochner の定理および de Moivre-Laplace の中心極限定理の実効化が示された。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　3　件）

① Yoshiki Tsujii, Multifractal decompositions of mutual-recursive sets corresponding to a probability and a weight, Acta Humanistica et Scientifica Universitatis Sangio Kyotiensis, 査読有, Vol. 43, 2014, pp.23-37.

② Yoshiki Tsujii, Spin-glass Theory of Random Iteration Algorith, Acta Humanistica et Scientifica Universitatis Sangio Kyotiensis, 査読有, Vol. 43, 2014, pp.9-21.

③ Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi,, Computability of Probability Distributions and Characteristic Functions, Logical Methods in Coamputer Science, 査読有, Vol.9(3:9), 2013, pp.1-11

〔学会発表〕（計　3　件）

① Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Levy computability of probability distribution functions, Computability and Complexity in Analysis (CCA2013), July 8, 2013, Laboratoire larrain de recherché en informatique et ses applications (France, Nancy)

② Takakazu Mori, Yoshiki Tsujii, Mariko Yasugi, Computability of Probability Distributions and Characteristic Functions, Computability and Complexity in Analysis (CCA2012), June 25, 2012, University of Cambridge, United Kingdom.

③ Takao Miyahara, Yoshiki Tsujii, Applications of Risk-Sensitive Value Measure Method to Portfolio Evaluation Problems, 7th Bachelier Finance Society Congress, June 19, 2012, Hilton Hotel Sydney, Australia.

６．研究組織

(1)研究代表者

辻井　芳樹（TSUJII Yoshiki）
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：90065871

(2)研究分担者

該当者なし

(3)連携研究者
八杉　満利子（YASUGI Mariko）
京都産業大学・-・名誉教授
研究者番号：90022277
（平成24年度より共同研究者へ）

森　隆一（MORI Takakazu）
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：00065880

細野　雄三（HOSONO Yuzo）
京都産業大学・理学部・教授
研究者番号：50008877