

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：34416

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540172

研究課題名(和文) 純飛躍型マルコフ過程及びジャンプ拡散過程の確率解析

研究課題名(英文) Stochastic analysis of jump-type Markov processes and jump-diffusion processes

研究代表者

上村 稔大 (Uemura, Toshihiro)

関西大学・システム理工学部・教授

研究者番号：30285332

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：ランダムな現象を解析する数学モデルの一つである確率過程，特にマルコフ過程について考察し，ジャンプ拡散過程の構成を semi-Dirichlet 形式を用いて行った．また，その標本路の大域的性質のひとつである保存性について，拡散データ，飛躍率及び基礎となる測度の増大度の条件を用いて導出することに成功した．また，純飛躍型マルコフ過程については，適当な条件を飛躍率に課すことにより，随伴マルコフ過程の存在が明らかにすることに成功した．

研究成果の概要(英文)：We succeeded to construct a stochastic process, in particular, a jump-diffusion Markov process by using a lower bounded semi-Dirichlet form theory. Moreover a conservative condition is derived in terms of diffusion data, jump rate and the volume growth of balls with respect to the basic measure. Further the existence of adjoint Markov process of the jump process is revealed under suitable conditions on the jump kernel.

研究分野：確率論

キーワード：Dirichlet 形式 マルコフ過程 保存性

### 1. 研究開始当初の背景

ランダムな現象を解析する数学モデルの一つとして確率過程論(特にマルコフ過程)の研究において、近年、標本路が時間に関して不連続であるようなマルコフ過程の研究が急速に注目を浴びてきている。実際、数理ファイナンスにおいて重要な公式として知られているブラック・ショールズ式が、拡散過程の一種である幾何ブラウン運動を基礎の上に成立していることは周知の事実である。

ところが、1998年のロシア財政危機に端を発した世界的な株価の急激な下落、2001年の全米同時多発テロ、所謂9.11のテロ直後の株価の急落など、大地震など突然の自然災害による社会活動の一時停止による株価の急落など、予測不可能な事件・事故などにより、それまでの“連続的変化”の破綻が相次いで発生している。それにより、標本路が連続であるという拡散過程によるモデル化の不適合性が指摘されて始めている。

近年、ますますそのような予測不可能な突然の不連続、それも大きな振幅で事故や事件が頻繁に起こり得ることが予想される現代においては、積極的にその不連続な状況を土台としたモデルの構築を行う必要があると思われる。特に最近では、対称安定過程やその一般化の純飛躍型のマルコフ過程に対する確率解析の研究が精力的に行われるようになってきた。更には、数理物理学の分野では、ブラウン運動に代わり、より一般の飛躍を持つマルコフ過程の構成が要請されてきており、またそれを土台とする“不変”測度の存在を探索する研究が数多く行われて来ている。

### 2. 研究の目的

本研究は、一つには、ディリクレ形式を通じて、それに対応する純飛躍型マルコフ過程の構成と、その標本路の諸性質を研究しようとするものである。これまでは、対称ディリクレ形式の理論を主に援用していたため、マルコフ過程も対称なものに限定をして研究を進めてきた。拡散過程の場合は、楕円型偏微分作用素に対応する二次形式を構成することにより研究は行われてきており、非発散型と呼ばれる作用素は非対称なディリクレ形式を扱うことに相当するが、発散型(これは対称)を考察することにより、それより微分階数の低い摂動を施すことにより非発散型(これは一般には非対称)が得られることが知られているため、一般の拡散過程は、対称なディリクレ形式の研究より考察が可能であるという事情があったためである。ところが、最近、純飛躍型のマルコフ過程は、それから対称化したものと、もとの形式より得られる作用素は、共に本質的に同じ階数になっており、対称化したものから低い階数の摂動を施して非対称なものを導くことが出来ないことが判明した。これは、拡散過程の場合とは著しく異なる現象である。従って、純

飛躍型マルコフ過程は、対称なもの、非対称なものをそれぞれ独立に研究を進めていく必要があると思われる。

さらに、対称化を考えるとということは、確率論的には時間反転に対して閉じた代数構造をマルコフ過程に求めているため、人工的な印象を与えてしまうことがある。マルコフ過程の離散時間モデルであるマルコフ連鎖の多くは、このような時間反転に対して閉じてはいない。そのために、一部分非対称なディリクレ形式の理論を対称な場合との比較で展開する必要が必要である。

一方、Hille-Yosidaの半群の理論について、これを微分積分作用素に対して適用し、1径数半群の構成を通じて、マルコフ過程、詳しくはフェラー過程の構成をも行う予定である。実際に、飛躍核と呼ばれるレヴィー核に適切な条件を与える事により、一部分そのことに成功している。これにより、ディリクレ形式により構成されたマルコフ過程の多義性の問題は生じず、直接的に確率過程の性質を考察することが可能となる。

### 3. 研究の方法

純飛躍型マルコフ過程及びジャンプ拡散過程を、必ずしも対称とは限らないディリクレ形式やHille-Yosidaの半群理論を用いて考察を行った。純飛躍型マルコフ過程に対応する生成作用素は非局所型作用素と呼ばれている。特に、通常の拡散過程に対応する生成作用素は2階の偏微分作用素であり、これは局所型作用素とも呼ばれる。

### 4. 研究成果

主な発表論文等に行った発表論文の成果内容について順番に簡単に解説していく。

- (1) この論文では、非対称なジャンプ拡散過程の構成を、下に有界なsemi-Dirichlet形式の理論を用いて構成することに成功した。それまでは、飛躍部分は、拡散項の摂動として捉えて確率過程の構成はなされていたが、ここでは、飛躍部を摂動とは見なさず、直接Dirichlet形式として構成することが可能であることを示した。
- (2) 非対称な飛躍型の確率過程を雑誌論文において構成することに成功しているが、その場合、共役部分に対応する確率過程の存在については未解決であった。この論文では、飛躍測度に一定の仮定を置くことにより、共役部分に対応する確率過程の存在が判明した。特に、飛躍測度を構成する密度関数が滑らかであれば、実際に適当な“killing rate”のもと、共役過程が存在することがわかった。
- (3) この論文では、対称な飛躍型過程の標本路の爆発問題を取り扱った。とくに飛躍測度が、基礎の測度の適当な発散条件の

もとで爆発が起こることを示すことに成功した。

- (4) この論文では, ジャンプ拡散過程に対する爆発問題と再帰問題を取り扱った。
- (5) この論文では, 対称とは限らない飛躍測度を持つ飛躍過程を, 下に有界な semi-Dirichlet 形式を用いて構成することに成功した。
- (6) 確率過程には, 生成作用素と呼ばれる  $L^2$ -空間の生成作用素が存在するが, その定義域の同定は基本的問題ではあるが, その考察には困難が伴う。この論文では, 特に飛躍型の確率過程に対して, 飛躍密度に, 適当な仮定を置くことによりその同定を行うことに成功した。
- (7) 一般に, Liouville 性は, 有界な調和関数は定数に限る, というものであるが, この性質を飛躍型のマルコフ過程の場合に考察を試みた画期的な論文である。
- (8) 対称な飛躍型マルコフ過程の保存性問題を一般的な枠組みで取り扱った最初の論文である。とくに基礎の測度と飛躍率の関係性のもと, 保存性の条件を与えることに成功している。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 8 件)

Toshihiro Uemura, On multidimensional diffusion processes with jumps, Osaka Journal of Mathematics, 査読有, Vol. 51, 2014, 969-992

Toshihiro Uemura, On dual generators for non-local semi-Dirichlet forms, Probability and Mathematical Statistics, 査読有, vol.34, 2014, 199-214

Yuichi Shiozawa and Toshihiro Uemura, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on  $\mathbb{R}^d$ , Journal of Theoretical Probability, 査読有, vol. 27, 2014, 404-432

Jun Masamune, Toshihiro Uemura and Jian Wang, On the conservativeness and the recurrence of symmetric jump-diffusions, Journal of Functional Analysis, 査読有, vol. 263, 2012, 3984-4008

Masatoshi Fukushima and Toshihiro Uemura, Jump-type Hunt processes generated by lower bounded semi-Dirichlet forms, The Annals of Probability, 査読有, Vol.40, 2012, 858-889

Rene L. Schilling and Toshihiro Uemura, On the structure of the domain of a symmetric jump type Dirichlet form, Publications of the Research Institute

for Mathematical Sciences, Kyoto Univ., 査読有, vol.48, 2012, 1-20

Jun Masamune and Toshihiro Uemura,  $L^p$ -Liouville property for nonlocal operators, Mathematische Nachrichten, 査読有, vol.284, 2011, 2249-2267

Jun Masamune and Toshihiro Uemura, Conservation property of symmetric jump processes, Annales de l'Institut Henri Poincaré-Probabilités et Statistiques, 査読有, vol.47, 2011, 650-662

[学会発表](計 10 件)

Kohei Suzuki and Toshihiro Uemura, On instabilities of global path properties of symmetric Dirichlet forms under the Mosco convergence, Dirichlet Form Theory and its Applications, 2014 年 10 月 19 日 - 10 月 25 日, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany

Toshihiro Uemura, On a conservativeness of jump-type semi-Dirichlet forms, 7th International Conference on Stochastic Analysis and its Applications, 2014 年 8 月 6 日 - 8 月 11 日, Seoul National University, South Korea

Toshihiro Uemura, On recurrence of symmetric jump processes, Dirichlet Forms and Applications, German-Japanese Meeting on Stochastic Analysis, 2013 年 9 月 9 日 - 9 月 13 日, Mathematisches Institut der Universität Leipzig, Leipzig, Germany

上村稔大, 飛躍型 Markov 過程と Dirichlet 形式, 日本数学会 秋季総合分科会, 統計数学科分科会, 特別講演, 2012 年 9 月 18 日, 九州大学, 伊都キャンパス

Toshihiro Uemura, On dual generators for nonlocal semi-Dirichlet forms, 6th International Conference on Stochastic Analysis and Its Applications, 2012 年 9 月 10 日 - 9 月 14 日, Bedlewo, Poland

上村稔大, 塩沢裕一, Explosion of jump-type symmetric Dirichlet forms on  $\mathbb{R}^d$ , 日本数学会 2012 年年度会 統計数学科分科会, 2012 年 3 月 26 日, 東京理科大学

上村稔大, 飛躍をもつ拡散過程の構成について, 奈良女子大学理学部数学科談話会, 2012 年 1 月 27 日, 奈良女子大学

上村稔大, On conservativeness of symmetric jump processes I, II, 「確率解析とその周辺」 確率解析研究会, 2011 年 11 月 11 日 - 11 月 12 日, 佐賀大学

上村稔大, On multidimensional diffusion process with jumps, PIMS International workshop 'Foundations of Stochastic Analysis (11w5077)', 2011 年 9 月 22 日, Banff International Research Station, Canada

上村稔大, Jump-type Hunt processes  
generated by lower bounded semi-  
Dirichlet forms I,II, NCTS/TPE  
Activity in Analysis / Probability /  
Applications , 2011年5月4日 , National  
Taiwan University, Taipei

〔その他〕  
ホームページ等

<http://gakujo.kansai-u.ac.jp/search/index.jsp>

#### 6. 研究組織

##### (1) 研究代表者

上村 稔大 (Uemura, Toshihiro)  
関西大学・システム理工学部・教授  
研究者番号：30285332

##### (2) 研究分担者

なし

##### (3) 連携研究者

なし