

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 18 日現在

機関番号：52201

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540176

研究課題名(和文) グラフのゼータ関数の拡張とその応用

研究課題名(英文) A generalization of zeta function of a graph and its application

研究代表者

佐藤 巖 (Sato, Iwao)

小山工業高等専門学校・一般科・教授

研究者番号：70154036

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,100,000円

研究成果の概要(和文)：グラフやdigraphの重み付きゼータ関数、行列重みのL関数の行列式表示を与え、グラフのedge L関数を導入し、その行列式表示を導いた。また、2部グラフの一般ゼータ関数の行列式表示を与え、hypergraphの一般ゼータ関数の行列式表示を導いた。hypergraphのedgeゼータ関数、edge L関数を考察した。Grover行列とその正台や、その2乗の正台の特性多項式を、既知のグラフのゼータ関数の行列式表示を用いて導出し、それらのスペクトルを決定した。また、Grover行列の2乗の正台に関連する、グラフのゼータ関数を定義し、オイラー積、母関数表示、行列式表示、極、収束半径を論じた。

研究成果の概要(英文)：We presented determinant expressions for the weighted Bartholdi zeta function of a digraph and the matrix-weighted Ihara L -function of a graph. Moreover, we presented a determinant expression of an edge L -function of a graph. Furthermore, we gave a determinant expression for the generalized Bartholdi zeta function of a bipartite graph, and then obtained a determinant expression for the generalized Bartholdi zeta function of a hypergraph. We considered the edge zeta function and the edge L -function of a hypergraph.

We presented the characteristic polynomials of the Grover matrix and its positive support, the positive support of its square by using determinant expressions of zeta functions of a graph. As applications, we determined their spectra. Furthermore, we define a zeta function of a graph with the positive support of the square of the Grover matrix as an edge matrix, and treated the Euler product, the determinant expression, the pole and the radius of convergence of it.

研究分野：グラフ理論

キーワード：グラフ ゼータ関数 量子ウォーク

1. 研究開始当初の背景

ゼータ関数は、リーマンのゼータ関数を始め、整数論、代数幾何、スペクトル幾何、力学系等いろいろな分野に現れ、数学の重要な理論、問題、リーマン予想などの予想に深く関わっている。例えば、整数論では、素数の分布に関するリーマンのゼータ関数、デデキントのゼータ関数のアルティンのL関数による分解公式、 p -進離散群の伊原のゼータ関数がある。リーマン多様体のスペクトル幾何には、セルバーグのゼータ関数や砂田の等スペクトル多様体の仕事がある。

セール(1980)によって、伊原のゼータ関数(Iharaゼータ関数)(1966)が、正則グラフのゼータ関数であることが指摘されたのをきっかけに、グラフのゼータ関数の研究が始まった。それを受けて、砂田がIharaゼータ関数のグラフ理論的定義と伊原の定理の別証明を与えた(1986,1988)。橋本は半正則2部グラフのIharaゼータ関数(1989)の行列式表示を与え、一般のグラフのIharaゼータ関数の行列式表示はパス(1992)によって与えられた。Stark & Terras(1996)、小谷&砂田(2000)、Foata & Zeilberger(1999)らによって、パスの定理の別証明が与えられた。

他のタイプのグラフゼータについては、Stark & Terrasが、グラフのarcに重みを付けた、edgeゼータ関数の行列式表示を得ている(1996)。情報幾何の分野の渡辺&福水により、行列重みのゼータ関数が定義され、その行列式表示から、edgeゼータ関数の新しい行列式表示を得られた(2010)。また、Bartholdi(2000)が、backtrackingsをカウントする変数を含む、2変数のBartholdiゼータ関数について、行列式表示を与えた。

無限グラフのIharaゼータ関数については、Bass(1992)に始まり、Clair(2001)、Grigorchuk & Zuk(2004)を経て、Guido, Isola & Lapidus(2008,2009)による、periodic simple graph、periodic graph、fractal graphのIharaゼータ関数の行列式表示に至る。

物理と関連する分野では、量子グラフのspectral determinantにおいて、Iharaゼータ関数、Bartholdiゼータ関数が用いられ、グラフGの散乱行列やその重み付き版のある行列式のGのLaplacianや重み付きLaplacianの特性多項式によるSmilanskyの公式(2007)が、ある重み付きゼータ関数の行列式表示から導かれることがわかってきた。また、量子ウォークの分野では、最近、グラフ上の離散時間量子ウォークの時間発展行列(遷移行列)が、Iharaゼータ関数と密接に関係することが判明している。

グラフゼータとその周辺の研究は、1990年代後半、盛んになり、まだまだ、多くの課題が残されており、豊富な結果が出るものと思われる。この方面の研究は、現在、世界では、Stark&Terrasの後を受けて、Deitmar, Clair,

Winnie Li, Fang, Kang, Storm等のTerrasグループ、Guido, Isola, Lapidus等fractal geometryの研究グループ、Pollicott, Karlsson達があり、グラフのゼータ関数を拡張している。グラフのゼータ関数の応用としては、物理の分野から、Texier, Harrison, Desbois等の量子グラフの研究グループ、Hancock, Wilson等のパターン認識の研究グループ、情報幾何の分野の渡辺、福水達の参入があり、層が厚くなり、成果が期待できる。

2. 研究の目的

先ず、グラフやdigraphの2変数のBartholdi関数を、3変数以上のBartholdi関数に一般化して、その行列式表示を与え、正則被覆グラフや正則被覆digraphについて、その分解公式を求める。そして、弧に重みを付けた重み付きBartholdi関数や、その他のタイプの重み付きBartholdi関数に拡張する。特に、弧に行列の重みを付けた重み付きBartholdi関数を考え、その行列式表示を与える。また、それらをhypergraphに適用して、3変数以上のBartholdi関数や、重み付きBartholdi関数の行列式表示を与える。

Lapidus達が得た、無限グラフのゼータ関数を、無限digraphのBartholdiゼータ関数に拡張する。Winnie Li等が与えた $PGL_n(F)$ (F は非アルキメデスの局所体)のBruhat-Tits buildingのゼータ関数を、Bartholdiゼータ関数に一般化する。また、digraphのゼータ関数の行列式表示を応用として、digraphのscattering matrixを定式化して、Smilanskyの公式を一般化する。さらに、いろいろなグラフゼータを利用して、類体論等の被覆グラフ版を模索する。

3. 研究の方法

- ・2部グラフの3変数のBartholdiゼータ関数、Bartholdi L関数を定式化し、その行列式表示を求め、2部グラフの正則被覆グラフの3変数のBartholdiゼータ関数を、2部グラフの3変数のBartholdi L関数の積で表す。

- ・2部digraphの3変数のBartholdiゼータ関数、Bartholdi L関数を定義し、その行列式表示を与え、2部digraphの正則被覆digraphのBartholdiゼータ関数の、2部digraphの3変数Bartholdi L関数による分解公式を求める。

- ・一般のグラフの $n(\geq 4)$ 変数のBartholdiゼータ関数とBartholdi L関数を導入し、その行列式表示を求め、グラフの正則被覆グラフの n 変数Bartholdiゼータ関数を、グラフの n 変数のBartholdi L関数の積で表す。

- ・グラフの n 変数Bartholdiゼータ関数、Bartholdi L関数を、digraphの n 変数Bartholdiゼータ関数、Bartholdi L関数へ拡張し、それらの行列式表示を与え、digraphの正則被覆digraphの n 変数Bartholdiゼータ関数の、digraphの n 変数Bartholdi L関数による分解公式を求める。

- ・グラフのn変数Bartholdiゼータ関数、Bartholdi L関数を、グラフやdigraphのn変数重み付きBartholdiゼータ関数、Bartholdi L関数に拡張し、それらの行列式表示を与え、グラフの正則被覆グラフや、digraphの正則被覆digraphのn変数重み付きBartholdiゼータ関数を、グラフやdigraphのn変数重み付きBartholdi L関数の積で表示する。
- ・渡辺&福水の手法を用いて、digraphの重み付きBartholdiゼータ関数の新しい行列式表示を導く。
- ・グラフやdigraphの行列重みのゼータ関数を導く。
- ・2部グラフのn変数Bartholdiゼータ関数を利用して、hypergraphのn変数Bartholdiゼータ関数を定式化して、その行列式表示を与える。
- ・hypergraphのcoveringの概念を確立して、そのゼータ関数を調べる。特に、渡辺&福水が定式化した、hypergraphの行列重みのゼータ関数を、hypergraphのcoveringに適用して、その分解公式を導く。
- ・グラフGのscattering matrixをdigraphに拡張して、Smilanskyの公式のdigraph版を導き、上で述べたものとは異なる、digraphのゼータ関数を導く。
- ・periodic simple graphやfractal graphのdigraph版を考察し、それらのゼータ関数を取り扱う。
- ・ $PGL_n(F)$ のBruhat-Tits buildingのゼータ関数の行列式表示を、Bartholdiゼータ関数に一般化する。
- ・グラフの重み付きゼータ関数、重み付きL関数に関するセルバーグ型の跡公式を、正則グラフ、半正則2部グラフについて求める。
- ・正則グラフ、半正則2部グラフの重み付きグラフゼータに対し、極の偏角の分布について、「半円則」の類似が成立するかどうか考える。
- ・グラフゼータに絡む整数論の本を読んで、二次体の整数論、単数定理など知識を深め、被覆グラフについて類似な性質を調べる。
- ・bipartite coveringに関する、Stark&Terrasの結果を、 $\{1, -1\}$ に重みを持つ、signed digraphの重み付きゼータ関数と関連させて、digraphのbalanced coveringについて、類似の結果を出す。
- ・重み付きゼータ関数と関連させて、有限群に重みを持つ、 $-$ signed graphのbalanced coveringについて、Stark&Terrasの結果と類似の結果を出す。
- ・砂田によるリーマン多様体の類体論等の被覆グラフ版を模索する。
- ・quantum graphの専門書を読んで、quantum graphのLaplacian, scattering matrixについての手法を勉強する。

- ・本来の quantum graph の scattering matrix に関する行列式の種々の公式を、渡辺&福水の手法を用いて、別証明が可能かを調べる。
- ・グラフゼータは、グラフの Ising モデルの分配関数と密接な関係があるので、統計物理と離散数学の専門書を読んで、グラフゼータとグラフの Ising モデルの分配関数、その他のグラフの多項式 (matching 多項式等) との関係の可能性を探る。
- ・グラフゼータを含む領域の国際シンポジウムに出席して、最新の情報を手に入れる。
- ・成果が出たら、日本数学会、国際シンポジウム等で発表し、論文にまとめて投稿する。

4 . 研究成果

グラフやdigraphのゼータ関数の拡張として、渡辺&福水の手法を用いて、digraphの重み付きBartholdiゼータ関数の新しい行列式表示(2013)、グラフの行列重みのIhara L関数の行列式表示(2014)を与えた。また、グラフのedge L関数を導入し、その行列式表示を導いた(2012)。さらには、2部グラフの3変数の一般Bartholdiゼータ関数を定義し、その行列式表示を得た(2013)。

hypergraphについては、3変数の一般Bartholdiゼータ関数を導入し、その行列式表示を与え(2014)、hypergraphのedgeゼータ関数、edge L関数を定義し、それらの行列式表示を求め、hypergraphのcoveringのedgeゼータ関数をedge L関数の積で表示した(2012)。

無限グラフについては、periodic simple graph GのBartholdiゼータ関数が、 G へ収束する正則被覆グラフの無限列のBartholdiゼータ関数の極限であることを示した(2012)。

量子グラフ関連では、Smilanskyの定理をdigraphに拡張し(2013)、それをもとに、グラフやdigraphの新たな重み付きゼータ関数を定義し、その行列式表示を得た(2011,2014)。

グラフ上の量子ウォークについては、偶然、今野先生と共同研究する機会を得て、グラフ上の離散時間量子ウォークの一つであるGroverウォークのGrover遷移行列とその正台の特性多項式を、第2種重み付きゼータ関数とIharaゼータ関数の行列式表示を用いて導出し、直接的に、それらのスペクトルを決定した(2012)。また、一般Szegedy遷移行列を導入して、その特性多項式を与え、応用として、Grover遷移行列とその正台、Szegedy遷移行列の特性多項式を導き、それらのスペクトルを直接的に、決定し、Grover遷移行列の2乗の正台の特性多項式からそのスペクトルを導き、Grover遷移行列の3乗の正台の行列の構造を決定した(2013)。量子グラフの4つの散乱行列から、4つの量子ウォークを考え、それらの関係を論じ、特性多項式を導いた(2013)。Grover遷移行列とIharaゼータ関

数の関連性をもとに、Grover遷移行列の2乗の正台を"edge matrix"とする、グラフのゼータ関数(modifiedゼータ関数)を定義し、オイラー積、母関数表示、行列式表示、極、収束半径を与え、complexityのとの関連を論じた(2014)。2014年、"AMS Special Session on Quantum Walks, Quantum Computation and Related Topics"に招待され、"Quantum walk and zeta function of a graph"というタイトルにて発表した。2015年も同会に招待され、発表予定である。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 23 件)

- [1] Yu. Higuchi and I. Sato, Balanced signed digraph, *Graphs and Combinatorics* (2014), 1-16.
- [2] Y. Higuchi, N. Konno, I. Sato, and E. Segawa, Spectral and asymptotic properties of Grover walks on crystal lattices, *J. Funct. Anal.* 267 (2014), 4197-4235.
- [3] I. Sato, Zeta functions and complexities of middle graphs of semiregular bipartite graphs, *Discrete Math.* 335 (2014), 92-99.
- [4] I. Sato, New proofs of Bapat and Sivasubramanian's theorems, *Linear Algebra Appl.* 448 (2014), 1-10.
- [5] I. Sato, H. Mitsuhashi and H. Morita, A matrix-weighted zeta function of a graph. *Linear Multilinear Algebra* 62 (2014), no. 1, 114-125.
- [6] H. Mizuno and I. Sato, Some weighted Bartholdi zeta function of a digraph, *Linear Algebra and its Applications* 445 (2014), 1-17.
- [7] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, Quantum graph walks II: Quantum walks on graph coverings. *Yokohama Math. J.* 59 (2013), 57-90.
- [8] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, Quantum graph walks I: Mapping to quantum walks. *Yokohama Math. J.* 59 (2013), 33-55.
- [9] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, A note on the discrete-time evolutions of quantum walk on a graph, *Journal of Math-for-Industry* 5B (2013), 103-109.
- [10] I. Sato, H. Mitsuhashi and H. Morita, A new determinant expression for the weighted Bartholdi zeta function of a digraph. *Electron. J. Combin.* 20 (2013), no. 1, Paper 27, 17 pp.
- [11] I. Sato and S. Saito, A generalized Bartholdi zeta function for a regular covering of a bipartite graph, *Linear Algebra Appl.* 438 (2013), 1025-1056.
- [12] I. Sato, Edge zeta functions of hypergraphs, *J. Appl. Math. Comput.* 40 (2012), 209-220.
- [13] N. Konno and I. Sato, On the relation between quantum walks and zeta functions, *Quantum Information Processing* 11 (2012), 341-349.
- [14] I. Sato and S. Saito, The edge L-function of a graph, *Linear Algebra and its Applications* 436 (2012), 1376-1384.
- [15] I. Sato, New proofs for Levine's theorems, *Linear Algebra and its Applications* 436 (2011), 943-952.
- [16] I. Sato, A zeta function of a semi regular weighted bipartite graph, *Ars Combinatoria* 99 (2011), 289-301.
- [17] I. Sato, Bartholdi zeta functions of periodic graphs, *Linear and*

Multilinear Algebra 59 (2011),
no.1,11-24.

- [18] H. Wu, R. Feng and I. Sato, Vertex weighted complexities of graph coverings, Algebra Colloq. 18 (2011), no.1, 129-138.

〔学会発表〕(計 58 件)

- [1] 今野 紀雄, 佐藤 巖, 瀬川 悦生, 樋口 雄介, 量子グラフウォーク, 日本数学会応用数学分科会, 2015.3.
- [2] 今野 紀雄, 佐藤 巖, 瀬川 悦生, 樋口 雄介, 量子グラフウォーク, スペクトラルグラフ理論および周辺領域(第3回研究集会), 2015.3.
- [3] 佐藤 巖, グラフの伊原ゼータ関数, 熊本大学教育学部数学教室幾何セミナー(連続講演), 2015.3.
- [4] S. Negami and I. Sato, Weighted zeta functions for quotients of regular coverings of graphs, 研究会「直観幾何学」(熊本大学), 2015.3.
- [5] 佐藤 巖, 量子ウォークとグラフのゼータ関数, 数理科学小研究集会(福島大学), 2015.1.
- [6] Y. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, A note on the discrete-time evolutions of quantum walk on a graph, AMS Special Session on Quantum Markov Chains, Quantum Walks, and Related Topics, 2015.1.
- [7] Y. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, A note on the discrete-time evolutions of quantum walk on a graph, Quantum Simulations and Quantum Walks 2014, 2014.11.
- [8] 佐藤 巖, グラフの modified zeta function の trace formula, 3rd Yokohama Workshop on Quantum Walks(横浜国大), 2014.11.
- [9] 今野 紀雄, 佐藤 巖, 瀬川 悦生, 樋口

介, 量子グラフから得られる量子ウォーク, 量子系の数理と物質制御への展開: 量子ウォークを架け橋に(東北大学), 2014.9.

- [10] I. Sato, The weighted complexity of the line digraph of a digraph, Japanese Conference on Combinatorics and its Applications 2014 (Tsukuba University), 2014.8.
- [11] 佐藤 巖, グラフの離散時間量子ウォークの遷移行列に関するゼータ関数, 室蘭工大表現論特別セミナー(室蘭工大), 2014.5.
- [12] Y. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, A zeta function of a graph with respect to the transition matrix of quantum walk, Japan Conference on Graph Theory and Combinatorics (Nihon University), 2014.5.
- [13] 佐藤 巖, Grover 遷移行列の 2 乗の正台関するゼータ関数, 量子ウォークミニ研究集会(横浜国大), 2013.3.
- [14] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, Quantum walk and zeta function of a graph, AMS Special session on Quantum Walks, Quantum Computation, and Related Topics, (Baltimore Convention Center, Baltimore, USA), 2014.1.
- [15] Yu. Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, A note on the discrete-time evolutions of quantum walk on a graph, The 25 th Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama University, 2013.11.
- [16] 佐藤 巖, グラフの量子ウォークの遷移行列のスペクトル, 室蘭工業大学数理科学談話会, 2013.5.
- [17] 佐藤 巖, Grover 遷移行列とその周辺, 今野研究室 + 竹居研究室合同セミナー

- (横浜国大), 2013.4.
- [18] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 愛媛大学数学教室談話会, 2013.3.
- [19] 佐藤巖, 離散時間量子ウォークの遷移行列の3乗の positive support, 「代数的グラフ理論、スペクトラルグラフ理論および周辺領域」(名古屋大学), 2013.1.
- [20] Yu.Higuchi, N. Konno, I. Sato and E. Segawa, On the cube of the transition matrix of a discrete-time quantum walk on a graph, Workshop of Quantum Dynamics and Quantum Walks (Okazaki Conference Center), 2012.11.
- [21] 今野紀雄, 佐藤巖, 瀬川悦生, Scattering matrix of a quantum graph, RIMS 共同研究「量子ウォークとその周辺」(京都大学), 2012.8
- [22] N. Konno, I. Sato, Quantum walk and the graph isomorphism problem, 2012 Shanghai Conference on Algebraic Combinatorics (Shanghai Jiao Tong University), 2012.8.
- [23] 佐藤巖, 根上生也, Weighted zeta functions for quotients of regular coverings of graphs, 離散数学とその応用研究集会 2012(茨城大学), 2012.8.
- [24] 今野紀雄, 佐藤巖, 量子ウォークとグラフのゼータ関数, CMRU 研究会「量子確率論と量子ウォーク」(東北大学), 2012.7.
- [25] 佐藤巖, 量子ウォークとグラフのゼータ関数, 今野研究室セミナー, 2012.2.
- [26] 佐藤巖, 量子ウォークとグラフのゼータ関数, 北海道大学群論セミナー, 2011.9.

- [27] 佐藤巖, グラフのゼータ関数と量子ウォーク, 室蘭工業大学数理科学談話会, 2011.9.
- [28] 佐藤巖, グラフの正則被覆の重み付き散乱行列, 第28回代数的組合せ論シンポジウム, 2011.6.
- [29] 佐藤巖, 量子ウォークとグラフのゼータの関係, 宇都宮大学教育学部数学科談話会, 2011.6.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者
佐藤 巖 (SATOU IWAO)
小山工業高等専門学校・一般科・教授
研究者番号: 70154036

(2) 研究分担者
()

研究者番号:

(3) 連携研究者
()

研究者番号: