

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 30 日現在

機関番号：11501

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540182

研究課題名(和文)多重線形作用素の調和解析的研究

研究課題名(英文)Multilinear Operators in Harmonic Analysis

研究代表者

佐藤 圓治 (Sato, Enji)

山形大学・理学部・教授

研究者番号：80107177

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円、(間接経費) 1,050,000円

研究成果の概要(和文)：偏微分方程式の研究に有効な方法として調和解析の手法がある。その中で特異積分・分数冪積分作用素などの研究は重要である。更に、それら作用素がどの関数空間で有界であるかは、偏微分方程式の解空間の研究に対応して大切である。本研究では、特に、線形の分数冪作用素、多重線形分数冪積分作用素について重み付きモレー空間での研究を行い、これまでの研究を一般化することができた。これらは、分担者を含む共同研究などで、査読付き専門雑誌に発表済み又は掲載決定している。また、 L_p 空間のFourier乗作用素の性質等がモレー空間に関連して結果が得られ、専門雑誌に掲載決定している。

研究成果の概要(英文)：Study in harmonic analysis is important for partial differential equations. Especially, study of singular integral operators and fractional integral operators are useful for differential equations, and we study the boundedness of those operators in some function spaces. In this plan, we got the boundedness of multilinear fractional integral operators in weighted Morrey spaces, which are generalization whose results were already known and those results are accepted in the journal. Also we obtained some properties of Fourier multipliers and the predual in Morrey spaces, and those results are accepted in the two journals.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・解析学基礎

キーワード：モレー空間 分数冪積分作用素 重み関数 フーリエマルチプライヤー 多重線形作用素

1. 研究開始当初の背景

(1)1950年代に Calderon-Zygmund は、特異積分作用素の L_p 空間上での有界性を研究し、偏微分方程式への応用に成功した。このときに使われた Calderon-Zygmund 分解といわれる関数の分解の手法は、その後の解析学の研究の大きな発展をもたらした。そして、Hardy 空間や Lorentz 空間などの関数空間上の作用素の研究へと繋がった。

(2)Morrey は、1930年代に L_p 空間を一般化した空間を研究し、偏微分方程式の研究に導入した。これが、今日、Morrey 空間と言われるものである。この空間は、関数空間としても興味があり、1960年代に Peetre 等により、1970年代に Adams 等により研究された。その後、Chiarenza 等、イタリアの研究者達により、分数冪積分作用素の Morrey 空間上での有界性が研究され、最近、分数冪積分作用素の研究が、盛んになった。

(3)1970年代に、重み付き空間の理論が Muckenhoupt 等により研究され、重み付き空間での関数空間上の作用素の研究が行われるようになった。重み付き Morrey 空間上の分数冪積分作用素の有界性の研究は、Komori-Shirai によって行われた。

(4)A. Calderon の Lipschitz 曲線上の Bilinear Hilbert 変換の有界性に関する問題は、30年ほど未解決であったが、1997年に Lacey-Thiele により解決した。この後、多重特異積分作用素などの多重線形作用素の有界性の研究が盛んになった。また、Muckenhoupt の重みの理論を多重型にする研究が最近、Lerner 等によって行われ、多重線形作用素の重み付き空間上で研究されるようになった。

(5)Fourier 級数の部分和の作用素は、Fourier multiplier の立場から見ると L_p 空間上の有界線形作用素であり、この Fourier multiplier としてのもっと一般の作用素に対しては、1960年代以降、K. de Leeuw 等により多くの研究が行われた。

2. 研究の目的

(1) L_p 空間の一般の空間である重み付き Morrey 空間上の分数冪積分作用素について、線形の場合及び多重線形の場合について、有界性を研究することである。分数冪積分作用素についての有界性の研究は、多くあり、 L_p 空間に関する Hardy-Littlewood-Sobolev の不等式、Morrey 空間に関しては、Stampacchia、Peetre、Adams 等の研究があった。更に、Chiarenza、Frasca 等の研究もある。そして、1970年代に L_p 空間に関する重み付き不等式での Muckenhoupt、Wheeden 達の重みに関する理論がある。重み付き Morrey 空間に関しては、Komori-Shirai の不等式がある。これらの研究の中で、重み付き Morrey 空間に関して、どのような重みで分数冪積分作用素が重み付き Morrey 空間において有界性が成り立つ

かを研究することである。Lerner 等による多重型の重みの理論に関係して重み付き Morrey 空間上の多重線形分数冪積分作用素についての有界性の研究である。

(2)Fourier multiplier を Morrey 空間などとの関係で研究することである。Fourier multiplier は、 L_p 空間上での研究が多くあるので、Morrey 空間との関係で研究するのも目的の一つである。

(3)Morrey 空間の関数空間としての性質を調べることである。Zorko は、共役空間が Morrey 空間となるような関数空間である Zorko 空間を発見した。これら関数空間についての関数解析的な研究を行うことである。

3. 研究の方法

(1)本研究課題に関係する文献及び図書を研究する。

(2)研究課題に関する調和解析セミナー等の研究会・実解析学シンポジウム・日本数学会に参加し、討論参加・情報収集を行う。

(3)分担者とは、重み付き Morrey 空間上の分数冪積分作用素について共同研究を行う。また、連携研究者とは、直交関数系のなす関数空間上の多重線形作用素について共同研究を行う。更に、本研究課題に関心のある研究者達と共同研究を行う。

4. 研究成果

(1)分数冪積分作用素の重み付き Morrey 空間での有界性について、分担者・飯田・田中・澤野等との共同研究によりこれまでの結果を一般化することができ、専門雑誌に発表することができた。次の通りである：

(i)Hardy-Littlewood-Sobolev の分数冪積分作用素の有界性についてのよく知られた結果がある。1969年の論文で発表されている Spanne の結果は、 L_p 空間を Morrey 空間に一般化している。更に、Adams は、1975年に新しい不等式を得て、彼らの結果を精密化した。飯田 古谷 佐藤は、共同研究により重み関数を研究し、Spanne 及び Adams の不等式を含む結果を得ることができた。その結果は数学の専門雑誌である Tokyo J. of Math. に掲載となった。

(ii)(i)で得た結果を飯田-古谷-佐藤の共同研究により多重線形分数冪積分作用素へ一般化することを研究し、結果を得ることができた。その内容は次の通りである：

線形の場合の Muckenhoupt-Wheeden による重み関数を研究し、その属するクラスは(i)で精密化している。一方、Moen は、2009年の論文で、多重の重み関数を研究し、Muckenhoupt と Wheeden による重み関数の枠組みを一般化している。また、多重分数冪積分作用素の有界性の研究は、Kenig-Stein により 1999年に行われている。飯田-古谷-佐藤は、線形の場合の Adams の不等式を一般化した重みのクラスを多重重み関数の場合

に一般化し、この多重重みのクラスにおける多重線形分数冪積分作用素の有界性を示すことができた。この結果は、数学の専門誌である *Scientiae Japonicae* に掲載済みである。(iii)飯田 佐藤 澤野 田中により多重線形分数冪積分作用素の有界性について共同研究を行った。Spanne の結果を Tang は、2008 年に直積 Morrey 空間上に一般化している。共同研究では、Tang や Adams の結果を含む多重分数冪積分作用素の有界性を示した。また、Olsen は、1995 年の論文で偏微分方程式に有用な不等式(Olsen の不等式と言われている)を示している。この共同研究では、Olsen の不等式タイプを多重線形作用素について示した。これらの結果は、数学の専門誌である *Acta Mathematica Sinica, English series* に掲載されている。

(iv)飯田-佐藤-澤野 田中により多重線形分数冪積分作用素の有界性について直積 Morrey 空間での研究を行った。これは、直積 Morrey 空間より小さい Multi-Morrey 空間を定義し、その上で多重分数冪積分作用素の評価を行った。この結果は、数学の専門誌である *Positivity* に掲載されている。

(v)和泉-古谷-佐藤の共同研究により分数冪積分作用素の重み付き空間での有界性の研究を行った。これまでの分数冪積分作用素についての Adams の不等式や小森氏と白井氏による Komori-Shirai の不等式および Muckenhoupt の重みの不等式を包括した不等式が得られた。その結果は、数学の専門誌である *Scientiae Japonicae* の online 版に掲載済みである。

(2)Fourier multiplier を Morrey 空間等との関係で研究を行った。Fourier multiplier については、 L_p 空間上での研究が多くあるので、これまでの研究から L_p 空間、Morrey 空間との関係で研究を行った。研究結果は次の通りである：

(i)勘甚 菅野 佐藤により Fourier multiplier の共同研究を行った。Fourier multiplier は、トーラスの空間での Fourier 級数にあっては、特別な場合として、部分和の作用素である。そして、その有界性の問題は、その関数空間で収束するかの問題となる。そのために様々な関数空間を対象として、Fourier 級数の部分和もしくはそれに近い作用素の有界性が研究されている。実数空間では、Fourier 級数に対応するのは Fourier 変換である。従って、実数空間での Fourier 変換の部分和の作用素もしくはそれに近い作用素の有界性が対象となる様々な関数空間で研究される。Fourier 級数と Fourier 変換は、三角関数の周期性より関係が深い。そのために、Fourier 変換での Fourier multiplier の性質から Fourier 級数での性質を導くことができる場合がある。このような観点から共同研究により、Fourier multiplier の重み付き L_p 空間から Lorentz

空間への制限定理を得ることができた。このタイプの最初の結果は、1965 年の K.de Leeuw の研究に始まる。K.de Leeuw は、実数空間において、Fourier multiplier が L_p 空間上で有界であれば、その整数への制限で定義されたトーラス空間での Fourier multiplier は、 L_p 空間上で有界であることを示した。この結果をその後の研究者達は発展させて多くの研究がある。2003 年に Berkson-Gillespie は、Muckenhoupt の重み関数を研究し、K.de Leeuw の結果を Muckenhoupt の重みの条件の下で重み付き空間に拡張することに成功した。その後、2009 年に Anderson-Mohanty は、Berkson-Gillespie の結果を Muckenhoupt の重みの条件を取り去ることに成功し、特別な重みでなくとも K.de Leeuw の結果が成立することを示した。この方法は、Gauss 核の性質を詳細に調べることによって行われたものである。勘甚-菅野-佐藤の共同研究は、Anderson-Mohanty の結果を Lorentz 空間に一般化したものである。Lorentz 空間は L_p 空間よりも真に広い空間であり、共同研究の結果も Anderson-Mohanty の結果を完全に一般化したものである。特に Fourier multiplier の弱型タイプの結果も得られる。この結果は、山形大学の研究雑誌の *Bull. of Yamagata Univ., Nat. Sci.* に掲載されている。

(ii)和泉 佐藤により単位円上の L_p 空間から L_p 空間の一般化になっている Morrey 空間への Fourier multiplier のなす空間の性質について共同研究を行った。これは L_p 空間から L_p 空間への結果である 1970 年の Figa-Talamanca-Gaudry による研究を一般化したものである。2013 年に京都大学で行われた日本数学会で発表され、その後、数学の専門誌である *Tokyo J. of Math.* に掲載が確定している。

(3)Morrey 空間についての関数解析的な研究を行い結果を得ることができた。次の通りである：

(i)和泉-佐藤-菅野の共同研究により、共役空間が Morrey 空間となるような関数空間である Zorko が発見した Zorko 空間について研究を行った。Adams-Xiao が 2012 年の論文で、Zorko 空間が共役空間となるような Morrey 空間の部分空間を発表していたが証明は他の文献を挙げて同様であるとしていた。共同研究により Adams-Xiao のアナウンスした方法とは別の Coifman-Weiss の方法により証明することができた。その方法は、Hardy 空間における Atom 分解と類似の方法を使うことによる。この結果は、数学の専門誌である *Tokyo J. of Math.* に掲載が決定している。

5 . 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 6 件)

- (1) T.Iida, Y.Komori-Furuya, E.Sato, The Adams inequality on weighted Morrey spaces, Tokyo J. of Math. 34(2011), 535-545.
- (2) T.Iida, Y.Komori-Furuya, E.Sato, New multiple weights and the Adams inequality on weighted Morrey spaces, Scientiae Mathematicae Japonicae 74(2011), 145-157.
- (3) T.Iida, E.Sato, Y.Sawano, H.Tanaka, Multilinear fractional integral operators on Morrey spaces, Acta Math. Sinica 28(2012), 1375-1384.
- (4) T.Iida, E.Sato, Y.Sawano, H.Tanaka, Sharp bounds for multilinear fractional integral operators on Morrey type spaces, Positivity 16 (2012), 339-358.
- (5) Y.Kanjin, A.Kanno, E.Sato, A note on the restriction of Fourier multipliers from weighted L_p spaces to Lorentz spaces, Bull. of Yamagata Univ., Nat. Sci., 17(2013), 17-26.
- (6) T.Izumi, Y.Komori-Furuya, E.Sato, The fractional integral operators related to the Adams inequality on weighted Morrey spaces, Sci. Math. Japonicae, online, 2013, 661-667.

〔学会発表〕(計 3 件)

- (1) 佐藤圓治, 和泉孝志, 単位円上の L_p 空間から Morrey 空間への Fourier multipliers について, 日本数学会 2013 年度年会, 於 京都大学, 2013 年 3 月
- (2) 和泉孝志, 古谷康雄, 佐藤圓治, Adams 不等式に関連した重み付き Morrey 空間上での分数冪積分作用素について, 実解析学シンポジウム 2013 於 岡山大学, 2013 年 11 月 2 日~11 月 4 日
- (3) E.Sato, Some properties of Morrey spaces on the unit circle, 1st East Asian conference in Harmonic analysis and Applications, 2013.10.24.10.26. Seoul National University

6. 研究組織

(1) 研究代表者

佐藤 圓治 (SATO, Enji)
山形大学・理学部・教授
研究者番号: 80107177

(2) 研究分担者

古谷 康雄 (FURUYA, Yasuo)
東海大学・理学部・教授
研究者番号: 70234903

(3) 連携研究者

勘甚 裕一 (KNJIN, Yuichi)
金沢大学・機械工学系・教授
研究者番号: 50091674