

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：12501

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540186

研究課題名(和文) 複素領域の非局所微分方程式と畳込み方程式の研究

研究課題名(英文) Study of non-local differential equations and convolution equations in the complex domain

研究代表者

石村 隆一 (ISHIMURA, Ryuichi)

千葉大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10127970

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：まず、凸領域  $D$  に対し、境界付近で多項式増大度を持つ正則関数の空間  $A_-(D)$  における解析的汎関数を核とする畳込み方程式について、斉次方程式の解の解析接続される方向を決定した。さらに非局所微分方程式について可逆性定理を証明し、これを用いて解の解析接続および可解性定理を得た。この応用として定数係数の方程式に対し、解の具体的構成法を与えることで定数係数の微分・差分方程式に対する演算子法を得た。

研究成果の概要(英文)：First we considered convolution equations with analytic-functional kernel in the space  $A_-(D)$  of holomorphic functions with polynomial growth near the boundary of a convex domain  $D$  and we determined the directions to which any solutions to the corresponding homogeneous equation is prolonged. Secondly, we established the invertibility Theorem for a non-local differential equation and using this, we proved the existence and analytic continuation for the equation. As an application, we obtained the operational calculus for a differential-difference equation with constant coefficients.

研究分野：解析学

キーワード：畳込み方程式 非局所微分方程式 包含的微分方程式系

### 1. 研究開始当初の背景

研究代表者と連携研究者は一貫して解析関数また超関数に関する局所および非局所微分方程式についての研究を行ってきた。とりわけ超関数を核とする畳込み方程式の、管状領域における正則解の存在と解の解析接続の研究には様々な新たな手法を導入することにより、さらに解析的汎関数を核とする場合にも研究を広げることができている。これらの研究方法はロシア・ロストフ南方数学研究所 A. V. Abanin とシンガポール・ナンヤン工科大学 Le Hai Khoi との共同研究として空間  $A^+$  で表される定義域の境界で多項式増大度を持つ正則関数の空間に対する研究へと応用することを行っていた。この空間は境界を越えて L. Schwartz の意味の超関数として延長できるような正則関数の空間ということでもあり興味深い空間である。この共同研究ではすでに一部成果が得られていた。さらに研究代表者は畳込み作用素を含むようなクラスとしての非局所擬微分作用素を定義し、合成、正則関数への作用を定義し、作用素と表象の 1 : 1 対応を与えている。この結果はさらに、1 点における正則関数の芽に作用する非局所擬微分作用素の研究、層の超局所理論を用いて、Fourier-Sato 変換によって非局所擬微分作用素のクラスを定義し、合成、関数への作用を層論的に構成した。

本研究はこれらをもとに、さらに研究を推し進めることを目指した。

### 2. 研究の目的

本研究では、畳込み方程式とより一般に非局所的擬微分方程式、特に複素領域における方程式に対する研究を中心とし、さらに周期的な常微分方程式や関数方程式および超関数の空間に働く積分作用素に関する研究を行った。また非線型偏微分方程式の包含系の初期値問題の解の存在域についての研究を行った。

研究の背景の項に述べたように、研究代表者および連携研究者のこれまでの研究により、畳込み方程式と無限階を含む微分・差分方程式に関する解の構成、正則解の解析接続について、および非局所擬微分作用素や 1 点における擬微分作用素の層の超局所理論的定式化と様々な性質について多くの結果を得ている。そこで、この研究ではそれらの結果と手法に関する経験をもとにして、当初の研究目的として以下の 3 つの研究テーマに取り組んだ。

- [1] 複素領域における畳込み方程式の研究
- [2] 非局所擬微分方程式の演算子法と可解性

#### [3] 局所・非局所線型微分方程式系の研究

[1] では、A. V. Abanin と Le Hai Khoi との共同研究として空間  $A^+$  における解析的汎関数を核とする畳込み方程式の一般理論を

完成することを目指した。また[2]では非局所擬微分方程式の解の存在、その応用として微分・差分方程式の演算子法の構成を目指した。[3]では単独の方程式の研究からさらにより本質的な連立方程式系についての研究を行うことを目標とした。

### 3. 研究の方法

上記研究の目的を遂行する為に、研究代表者および連携研究者は、相互間の研究討論のほかに、科学研究費を用いた出張を行い、研究集会に出席し情報を収集しまた研究成果の発表を行いさらに関連する研究者を訪れ研究討論を行った。国外への上張としては、連携研究者岡田によるイタリア・ボローニャ大学とトリノ大学への研究発表および情報収集のための出張がある。また研究目的を遂行するために、線型・非線型の微分方程式や超関数・関数解析および複素解析に関する著書、さらに包含系に関する書物を購入しこれらを研究することにより研究方法の進展に役立てた。特に、包含系や複素解析の研究に関する幾多の書籍は、研究の目的で述べた研究テーマに対して、畳込み方程式や非線型偏微分方程式系の研究に用いられる最近の結果と手法および問題意識を理解することにより新たな研究方法を得て研究方向を模索する手がかりを得ることができた。

非局所擬微分方程式の一般理論・演算子法を構築するという目的のために、具体的な微分・差分方程式に対するいくつかの実験的例計算を行い理論の構成とその構造の理解に役立てること、および研究連絡と研究成果発表に役立てるためにパーソナルコンピュータを導入した。

### 4. 研究成果

#### 研究の目的の

[1] 複素領域における畳込み方程式の研究については、空間  $A^+$  における畳込み方程式について A. V. Abanin と Le Hai Khoi との共同研究で、すでに得られていた研究結果を踏まえた進展を見た。解析的汎関数を核とする畳込み作用素に対し、核の Fourier-Borel 変換に対する条件  $(S^a)$  は既に  $A^+$  において畳込み方程式を考える上で本質的な条件であることがこの共同研究で発見されていた。そこで、核解析的汎関数はコンパクト凸集合  $K$  で支持されるとして、この自然な条件のもと、 $D$  を凸領域として空間  $A^+(D + K)$  に属する解の解析接続を、方程式に対応する畳込み作用素の特性方向を核解析的汎関数の Fourier-Borel 変換の無限遠での集積方向として定義したうえで、これらの特性方向に関して決まる拡張された領域への延長として得られることを証明した。この結果により、 $A^+$  における畳込み方程式の可解性、斉次方程式の解空間の Schauder 基底の構成に關す

る結果と合わせて空間  $A'$  における畳込み方程式の理論は完成した、とすることができる。次に

## [2] 非局所擬微分方程式の演算子法と可解性

については、非局所微分方程式を考え、これについて可逆性定理を証明し、さらにそれを用いて解の解析接続および可解性定理を得た。詳しくは、まず非局所微分作用素をコホモロジーを用いて定義し、さらに座標を決めたときにその表象の概念によって定義しなおされることを示し、この表象を用いて作用素の特性集合が自然に定義されるを見る。そしてこの特性集合によって決まる方向において作用素の一種の逆が定まり、この逆を用いて解と、そして対応する斉次方程式の解の、特性集合によって決まる領域への接続を証明した。さらに応用として定数係数の非局所微分方程式に対し解の具体的構成法を表象を用いて与えた。これにより特に定数係数の微分・差分方程式に対して演算子法を得た、とすることができる。

[3] 局所・非局所線型微分方程式系の研究について、包摂的偏微分方程式系の研究を行った。一般に Cartan - Kahler の定理において初期値問題の正則函数解は考えるジェットの点の近傍で得られることのみわかっているが、本研究においては解の存在域を方程式と初期値の定義域を用いて評価することができた。これには通常のように Cauchy - Kovalevskaya の定理を繰り返し用いるのではなく、優級数法を用いて表象から決まる定数係数方程式系の解の存在域を直接的に評価し、そのうえで元の方程式の解を逐次近似によって構成する、という B. Malgrange の方法を用いることによって精密な存在域の評価が得られた。この結果は Cartan - Kahler の問題の解の解析接続を研究するために基本的かつ重要であり、論文としてまとめることを予定している。

さらに、コンパクト台の超函数の空間での積分作用素の核が固有台を持つことを示し、さらに超関数の積分作用素における一意性や滑らかさの性質についても議論した。また像の特異台が常にコンパクトならば、作用素の核は固有な特異台を持つことを示した。さらに超関数に対する Massera 型定理を、反射的な局所凸空間に値をとるベクトル値超関数に対する方程式において確立した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

1. O. Liess and Y. Okada, Analytic singular support properties for integral operators in hyperfunctions,

Publ. RIMS. Kyoto Univ., 査読有, 51(4), (2015), pp.745--767, DOI: 10.4171/PRIMS/171

2. Y. Okada, A Massera type theorem in hyperfunctions in the reflexive locally convex valued case, Novi Sad J. Math., 査読有, 45(1), (2015), pp.241--251.

3. O. Liess and Y. Okada, Ultra-differentiable classes and intersection theorems, Mathematische. Nachrichten, 査読有, 287, (2014), pp.638--665, DOI: 10.1002/mana.201200248

4. Y. Okada, Massera type theorems in hyperfunctions with reflexive Banach values, RIMS Kokyuroku Bessatsu, 査読有, B40, (2013), pp.1--14.

5. R. Ishimura, Existence and prolongation of analytic solutions of non-local differential equations, Bullin Mathématique de la Société des Sciences Mathématique de Roumanie, 査読有, vol. 55(103), No. 2(2012), pp.179-197.

6. A. V. Abanin, R. Ishimura and Le Hai Khoi, Extension of solutions of convolution equations in spaces of holomorphic functions with polynomial growth in convex domains, Bulletin des Sciences Mathématiques, 査読有, vol. 136(2012), pp.96-110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002, published on line: 02/06/2011

7. O. Liess and Y. Okada, Support properties for integral operators in hyperfunctions, Advances in Mathematics, 査読有, 231, (2012), pp.1439--1461, DOI: 10.1016/j.aim.2012.07.002

8. Y. Okada, A notion of boundedness for hyperfunctions and Massera type theorems, Banach Center Publications, 査読有, 97, (2012), pp.101--111, DOI: 10.4064/bc97-0-7

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石村 隆一 (ISHIMURA Ryuichi)  
千葉大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号：10127970

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

岡田 靖則 (OKADA Yasunori)  
千葉大学・大学院理学研究科・教授  
研究者番号： 60224028