

平成 26 年 6 月 20 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540189

研究課題名(和文)バナッハ空間の種々の定数及びノルム不等式の研究とその応用

研究課題名(英文)Various constants and norm inequalities in Banach spaces and its applications

研究代表者

斎藤 吉助(Saito, Kichisuke)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：30018949

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：この研究課題での主な成果は、次のようなものである。

(1)バナッハ空間の幾何学的な構造を示す定数が多くあるが、その中で、von Neumann-Jordan定数やJames定数等の計算方法を提示し、2次元空間であるが、多くのバナッハ空間について正確な計算を行い、その定数の性質や特徴を示した。(2)バナッハ空間における直交性の概念を調べることにより、有限次元空間の構造を調べた。(3)三角不等式の精密化や一般化を行い、バナッハ空間の幾何学的概念の特徴付けに応用を試みた。

研究成果の概要(英文)：In this project, we mainly presented the following results.

(1) We presented how to calculate several geometrical constants of Banach spaces, in particular, two dimensional spaces, for example, von Neumann-Jordan constant, James constant and so on. (2) We studied the orthogonal structure of finite dimensional Banach spaces using the notion of Birkhoff orthogonality. (3) We proved the refinement and generalization of triangular inequalities in Banach spaces and considered its applications.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：解析学基礎

キーワード：バナッハ空間 ノルム不等式 James 定数 von Neumann-Jordan 定数

1. 研究開始当初の背景

Banach 空間の理論の研究は、多種多様に渡っているが、その中で種々の定数の研究は不等式の研究とも関連して重要であり、その定数の大きさによって、単位球の形状が決定される。単位球の丸さの概念として狭義凸性 (strictly convex) や一様凸性 (uniformly convex) など、真四角でないという概念として、uniformly nonsquare の概念が知られている。これらの概念は、Banach 空間の構造において重要な位置を占めている。また、Banach 空間のノルム構造を調べる上で、その構造を反映させる計量として、Banach 空間の種々の定数が研究されている。それらの代表的なものとして von Neumann-Jordan 定数 (NJ-定数) や James 定数などがある。NJ-定数の概念は 1937 年 Clarkson によって定義されて以来、今日まで、研究が続いている。NJ 定数の研究は、Banach 空間において中線定理が成り立たなさを度合いを表すものとして重要である。一方、James 定数は単位球の真四角さの度合いを表し、バナッハ空間の正規構造と関係して重要なものである。この研究課題は、国内では、 ℓ^p ノルムや L^p ノルム型の Banach 空間について NJ 定数や James 定数を研究し、それらの Banach 空間について特徴付けを研究していた。Banach 空間における absolute ノルムの構造は、斎藤-加藤-高橋により、 C^2 ではあるが、その上の absolute norm を凸関数の言葉で置き換えることにより、ノルムの構造がある凸集合上の凸関数の性質を調べればよいことを発見し、それにより、NJ 定数を具体的に計算することが出来るようになった。

2. 研究の目的

この研究では、Banach 空間の種々の定数とノルム不等式の研究として、三角不等式、Clarkson 不等式や Dunkl-William 不等式などの色々なノルム不等式を研究することにより、バナッハ空間の種々の定数の計算することを目指す。特に、absolute norm によって定義される Banach 空間を取り上げ、次の様な問題の解決を目指す。

- (1) C^n 上の absolute norm と凸関数の関係を詳細に調べることにより、 C^n 上の様々なノルムに対して、NJ 定数や James 定数などを計算或いは評価する。
- (2) 三角不等式、Clarkson 不等式、Dunkl-William の不等式などのノルム不等式を詳細に考察することにより、種々の定数との関係を考察する。
- (3) Banach 空間の直和空間の構造を調べることにより、一様凸性、狭義凸性などのノルム構造を考察することにより他分野への応用を考察する。

3. 研究の方法

バナッハ空間におけるノルム不等式の研究に重点を置いて研究を行う。まず、ノルム不等式の精密化を行い、そこに表れる定数とバナッハ空間における種々の定数との関係を調べると同時に、今までの結果を詳細に調べる。それにより、von Neumann-Jordan 定数や James 定数の計算或いは評価を行う。これらの結果を、バナッハ間の幾何学的構造或いは、単位球の形状を調べると共に、他分野への応用を考察する。これを遂行するために、代表者は各分担者と意見交換や研究打ち合わせをすると同時に、研究成果を発表し、この分野に興味を持つ研究者と意見交換を行う。

4. 研究成果

数学の多くの分野においてバナッハ空間の研究は重要であり、その中に多くの幾何学的な性質がある。その研究はいろいろな不等式と関連して発展してきている。そこでこの研究課題での主な成果は、次のようなものである。

- (1) バナッハ空間の幾何学的な構造を示す定数が多くあるが、その中で、von Neumann-Jordan 定数や James 定数の計算方法を提示し、2次元空間であるが、多くのバナッハ空間について正確な計算を行い、そこにある性質や特徴を示した。
- (2) 2次元空間上のすべての absolute norm で normalized ノルムの全体は凸集合になるので、その端点構造を特徴付けを行うとともに、James 定数を完全に決定した。
- (3) Dunkl-Williams 不等式から定義される定数についての計算方法を提示した。また、その不等式と関連させて、内積空間になるための条件を求めた。
- (4) バナッハ空間における skewness の概念を調べて、それから定義される skew 定数の性質を調べた。
- (5) バナッハ空間における直交性の概念を調べることにより、有限次元空間の構造を調べた。
- (6) 三角不等式の精密化や一般化を行い、バナッハ空間の幾何学的概念の特徴付けに応用を試みた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 35 件)

- (1) Tamotsu Izumida, Ken-Ichi Mitani and Kichi-Suke Saito, Another approach to characterizations of generalized triangle inequalities in normed spaces, Central European Journal of Mathematics (掲載決定) 査読有
- (2) M. Kato and T. Tamura, Direct sums of Banach spaces with FPP which fail to be

uniformly non-square, *J. Nonlinear Convex Anal.* 掲載決定. 査読有

(3)Y. Takahashi and M. Kato, On a new geometric constant related to the modulus of smoothness of a Banach space, *Acta Math. Sinica, English Series*, 掲載決定. 査読有

(4)T. Ikeda and M. Kato, Notes on von Neumann-Jordan and James constants for absolute norms on R^2 , *Mediterr. J. Math.*, 掲載決定. 査読有

(5)Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On generalized Beckner's inequality, *Anal. Funct. Anal.* 7(2014), 543-549. 査読有

(6)Ryotaro Tanaka and Kichi-Suke Saito, Orthonormal bases and a structure of finite dimensional normed linear spaces, *Banach J. Math. Anal.* 8(2014), no.1, 89-97. 査読有

(7)Hiroshi Sano, Tamotsu Izumida, Ken-Ichi Mitani, Tomoyoshi Ohwada and Kichi-Suke Saito, Characterization of the intermediate values of the triangle inequality II, *Cent. Eur. J. Math.*, 12(2014), no.5, 778-786. 査読有

(8)Ryotaro Tanaka, Tomoyoshi Ohwada and Kichi-Suke Saito, Geometrical constants and characterizations of inner product spaces, *Math. Inequal. Appl.*, 17(2014), No.2, 513-520. 査読有

(9)Kichi-Suke Saito, Naoto Komuro and Ken-ichi Mitani, How to calculate James constants of Banach spaces, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces IV*, 211-224, 2014, Yokohama Publisher, Yokohama. 査読有

(10)Ken-Ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Yasuji Takahashi, On skewness and geometrical constants of Banach spaces, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012*, 337-341, 2014, Yokohama Publisher, Yokohama. 査読有

(11)Hiroyasu Mizuguchi, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On the Dunkl-Williams constant of normed linear spaces, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces IV*, 343-351, 2014, Yokohama Publisher, Yokohama. 査読有

(12)Ryotaro Tanaka and Kichi-Suke Saito, A note on finite dimensional normed linear spaces, *Proceedings of the Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces IV*, 391-401, 2014, Yokohama Publisher, Yokohama. 査読有

(13)Ryotaro Tanaka and Kichi-Suke Saito, Characterizations of regular norms on R^n , *Nihonkai Math. J.*, 24(2013),

103-120. 査読有

(14)Ryotaro Tanaka, Kichi-Suke Saito and Naoto Komuro, Another approach to Becner's inequality, *J. Math. Inequal.*, 7(2013), no.3, 543-549. 査読有

(15)Hiroyasu Mizuguchi, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, On the calculation of the Dunkl-Williams constant of normed linear spaces, *Central European Journal of Mathematics*, 11(2013), 1212-1227. 査読有

(16)Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ken-ichi Mitani, On the James constant of extreme absolute norms on R^2 and their dual norms, *Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis I*, 255-268, Yokohama Publishers, Yokohama, 2013. 査読有

(17)Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Yasuji Takahashi, Skewness and geometrical constant of Banach spaces, *Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis II*, 23-27, Yokohama Publishers, Yokohama, 2013. 査読有

(18)Kichi-Suke Saito, How to calculate geometric constants of Banach spaces, *Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis II*, 193-203, Yokohama Publishers, Yokohama, 2013. 査読有

(19)Kichi-Suke Saito, Ken-ichi Mitani and Naoto Komuro, A note on extreme norms on R^2 , *Hokkaido Math. J.*, 42(2013), 1-9. 査読有

(20)Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Yasuji Takahashi, Skewness and James constant of Banach spaces, *J. Nonlinear and Convex Analysis*, 14(2013), No.1, 115-122. 査読有

(21)Kohei Nakade, Tomoyoshi Ohwada and Kichi-Suke Saito, Kolomogorov's theorem for a properly infinite von Neumann algebra, *J. Math. Anal. Appl.*, 401(2013), 289-292. 査読有

(22)Hiroyasu Mizuguchi, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, The Dunkl-Williams constant of symmetric octagonal norms on R^2 , *Nihonkai Math. J.*, 23(2012), No.2, 93-113. 査読有

(23)Ryotaro Tanaka and Kichi-Suke Saito, Every n -dimensional normed space is the space R^n endowed with a normal norm, *J. Inequal. Math.*, 2012, 2012:284. 5p. 査読有

(24)Kichi-Suke Saito and Masaru Tominaga, A Dunkl-Williams inequality and the generalized operator version, *International Series of Numerical Mathematics*, 161(2012), 137-148, Birkhauser. 査読有

(25) M. Kato and T. Tamura, On a class of convex functions which yield partial l^1 -norms, In: Banach and Function Spaces IV (Proc. Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012), pp. 199-210, 2014 査読有

(26) M. Kato and T. Tamura, Weak nearly uniform smoothness of the ψ -direct sums, Comment. Math. 52 (2012), 171-198. 査読有

(27) T. Ikeda, S. Kai and M. Kato, Von Neumann-Jordan constant for the norms associated with conics, J. Nonlinear Convex Anal. 13 (2012), 807-820. 査読有

(28) Y. Takahashi and M. Kato, On the inequality $C_{NJ}(X) < J(X)$, In: Banach and Function Spaces III, Proceedings of the 3rd International Symposium on Banach and Function Spaces 2009, Yokohama Publishers, pp. 317-328, 2011. 査読有

(29) Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Naoto Komuro, The monotonicity of absolute normalized norms on C^n , Nihonkai Math. J., 22(2011), no. 2, 91-102. 査読有

(30) Hiroyasu Mizuguchi and Kichi-Suke Saito, Some geometrical constants of absolute normalized norms on R^2 , Ann. Funct. Anal., 2(2011), no.2, 22-33. (Nov. 2011). 査読有

(31) Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ken-ichi Mitani, Extremal structure of absolute normalized norms on R^2 III, Banach and Function Spaces III, 2011, 271-279. (Oct. 2011). 査読有

(32) Kichi-Suke Saito and Ken-Ichi Mitani, On sharp triangle inequalities in Banach spaces and its application, Banach and Function Spaces III, 2011, 295-304. (Oct. 2011). 査読有

(33) Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ken-ichi Mitani, Extremal structure of the set of absolute normalized norms on R^2 and the James constant, Applied Math. Computation, 217(2011), 10035-10048. 査読有

(34) Mohammad S. Moslehiam, Masaru Tominaga and Kichi-Suke Saito, Schatten p -norm inequalities related to an extended operator parallelogram law, Linear Algebras and Applications, 435(2011), 823-829. 査読有

(35) Kichi-Suke Saito, Runling An, Hiroyoshi Mizuguchi and Ken-ichi Mitani, Another aspect of triangle inequality, ISRN Mathematical Analysis, Volume 2011(2011), Article ID 514184, 5 pages. 査読有

〔学会発表〕(計 48件)

(1) Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, 2次元 Lorentz 数列空間及びその双対空間の James 定数, 日本数学会年会、2014年3月18日

(2) 池田敏春, 加藤幹雄, On von Neumann-Jordan and James constants for absolute norms on R^2 , 日本数学会年会, 3月15日 - 3月18日, 2014.

(3) Kichi-Suke Saito, Ken-ichi Mitani and Ryotaro Tanaka, Recent development of James constant of two dimensional Lorentz sequence spaces, RIMS 研究集会、2014年1月8日、京都大学。

(4) 高橋泰嗣、加藤幹雄、On norm inequalities and geometric constants in Banach spaces, 第22回関数空間論セミナー、東京理科大学理学部, 12月21日 - 12月23日, 2013.

(5) Kichi-Suke Saito, James constant of two dimensional Lorentz sequence spaces, ICNAO2013 The international Conference on Nonlinear Analysis and Optimazation, December 21, 2013, Takao, Taiwan.

(6) M. Kato and T. Tamura, Direct sums of Banach Spaces with FPP which are not uniformly non-square, The International Conference on Nonlinear Analysis and Optimization (ICNAO2013), National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan, December 20--22, 2013.

(7) 加藤幹雄, Invitation to Banach space geometry, 第2回信州関数解析シンポジウム, 信州大学理学部, 2013年11月28日--11月29日.

(8) 泉田保、斎藤吉助、三谷健一、三角不等式の一般化について、京都大学数理解析研究所研究集会、2013年11月7日。

(9) 田中亮太郎、斎藤吉助、Beckner の不等式の一般化について、京都大学数理解析研究所研究集会、2013年11月7日。

(10) 田中亮太郎、斎藤吉助、有限次元ノルムの正規直交基底について、日本数学会秋期分科会、愛媛大学、2013年9月24日。

(11) 田中亮太郎、斎藤吉助、有限次元ノルムのノルム構造について、日本数学会秋期分科会、愛媛大学、2013年9月24日。

(12) 高橋泰嗣、加藤幹雄, On a new geometric constant of a Banach space, 日本数学会秋季総合分科会, 愛媛大学, 9月24日 - 9月27日, 2013.

(13) M. Kato, Some recent results on Banach space geometry, School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, P. R. China, September 27, 2013.

(14) M. Kato, On partial l^1 -norms and convex functions, School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing, P. R. China, September 24, 2013.

(15) M. Kato, On direct sums of Banach spaces and FPP, Department of Mathematics, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand, September 17, 2013.

(16) Kichi-Suke Saito, Recent results of Banach space theory, Seminar Talk, University of Iowa, September 12, 2013.

(17) Kichi-Suke Saito, Characterizations of geometrical properties of Banach spaces using α -direct sums, The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013), August 4, 2013, Hirosaki, Japan.

(18) Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ken-Ichi Mitani, Convex properties of James and von Neumann-Jordan constant of absolute norms on \mathbb{R}^2 , The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013), August 4, 2013, Hirosaki, Japan.

(19) Ryotaro Tanaka and Kichi-Suke Saito, Beckner's inequality and its generalizations, The Eighth International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2013), August 4, Hirosaki, Japan.

(20) M. Kato, On partial l^1 -norms, The 8th International Conference on Nonlinear and Convex Analysis, Hirosaki, Japan, Aug. 2--6, 2013.

(21) 齋藤吉助, 田中亮太郎, 小室直人, Beckner の不等式とその Banach 空間への応用について, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 21 日, 京都大学。

(22) 田中亮太郎, 齋藤吉助, 有限次元ノルム空間の構造について, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 21 日, 京都大学。

(23) 水口洋康, 齋藤吉助, 田中亮太郎, ノルム空間における Dunkl-Williams 定数の計算方法について, 日本数学会年会, 2013 年 3 月 21 日, 京都大学。

(24) 高橋泰嗣, 加藤幹雄, Some results on von Neumann-Jordan type constants of a Banach space, 日本数学会年会, 京都大学, 3 月 20 日 - 3 月 23 日, 2013.

(25) 田村高幸, 加藤幹雄, On direct sums of Banach spaces with a strictly monotone norm, 日本数学会年会, 京都大学, 3 月 20 日 - 3 月 23 日, 2013.

(26) 田村高幸, 加藤幹雄, On α -direct sums of Banach spaces with a strictly monotone norm, 第 21 回関数空間セミナー, 12 月 24 日--26 日, 2012.

(27) 齋藤吉助, 田中亮太郎, 小室直人, Beckner's inequality and its application to Banach spaces, 京都大学数理解析研究所研究集会, 2012 年 11 月 5 日。

(28) 田中亮太郎, 齋藤吉助, 有限次元ノルム空間の構造と直交基底について, 実解析学シンポジウム 2012, 茨城大学理学部, 2012 年

10 月 27 日。

(29) 加藤幹雄, 高橋泰嗣, On relations between $C_{NJ}(X)$ and $J(X)$ and a new geometric constant $A(X)$, 日本数学会秋季総合分科会, 九州大学, 9 月 18 日--21 日,

(30) 加藤幹雄, 田村高幸, Weak nearly uniform smoothness of direct sums of Banach spaces, 日本数学会秋季総合分科会, 九州大学, 9 月 18--21 日, 2012.

(31) Kichi-Suke Saito, How to calculate James constant of Banach spaces, The fourth International symposium on Banach and Function Spaces, 2012 年 9 月 13 日、九州工大 (招待講演)。

(32) Ryotaro Tanaka and Kichi-Suke Saito, A structure of n -dimensional normed linear spaces, The fourth International symposium on Banach and Function Spaces, 2012 年 9 月 13 日、九州工大。

(33) Hiroyasu Mizuguchi, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, The Dunkl-Williams constant of some Banach spaces, The fourth International symposium on Banach and Function Spaces, 2012 年 9 月 13 日、九州工大。

(34) M. Kato, Partially l^1 -norms and convex functions, Fourth International Symposium on Banach and Function Spaces 2012, Kitakyushu, Japan, Sep. 14--17, 2012.

(35) Hiroyasu Mizuguchi, Kichi-Suke Saito and Ryotaro Tanaka, A Calculation of Dunkl-Williams constant of Banach spaces, 京都大学数理解析研究所研究集会, 2012 年 8 月 29 日。

(36) 水口洋康, 齋藤吉助, Several geometric constants of absolute normalized norm on \mathbb{R}^2 , 日本数学会年会, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 2012 年 3 月 29 日。

(37) 齋藤吉助, 小室直人, 三谷健一, 田中亮太郎, von Neumann-Jordan 定数の凸性について, 日本数学会年会, 東京理科大学神楽坂キャンパス, 2012 年 3 月 29 日。

(38) Kichi-Suke Saito, On the convex property of von Neumann-Jordan constant, Colloquium of the Department of Mathematics, Universidad Complutense de Madrid, February 13, 2012.

(39) 加藤幹雄, Invitation to Banach space geometry, ポテンシャル論セミナー, 名城大学理工学部, Dec. 2, 2011.

(40) Osamu Hatori, Criteria for the equivalence of LCA groups, Workshop on Commutative Algebra 2011 in Nara University of Education -Commutative Algebra and related topics, 奈良教育大学 2011 年 11 月 4 日

(41) 齋藤吉助, von Neumann Jordan 定数について, 作用素論・作用素環論研究集会, 琉球大学, 2011 年 11 月 5 日。

(42) 三谷健一、斎藤吉助、高橋泰嗣、Skewness and geometrical constants for Banach spaces, 日本数学会秋期分科会、2011年9月28日。

(43) M. Kato, On some norm inequalities in the Banach space geometry, Recent Developments in Functional Analysis and Approximation Theory, Lecce, Italy, Sep. 22--24, 2011.

(44) 三谷健一、斎藤吉助、高橋泰嗣、バナッハ空間の skew 定数について、京都大学数理解析研究所、2011年8月30日。

(45) Kichi-Suke Saito, How to calculate the geometrical constants of Banach spaces, The seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, August 3, 2011, Pukyong National University, Busan Korea. (招待講演)

(46) Naoto Komuro, Kichi-Suke Saito and Ken-Ichi Mitani, On the James constant of extrem absolute norms on R^2 and their dual norms, The seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, August 3, 2011, Pukyong National University, Busan Korea. (招待講演)

(47) Ken-ichi Mitani, Kichi-Suke Saito, Yasuji Takahashi, Skew and geometrical constants of a Banach space, The seventh International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, August 3, 2011, Pukyong National University, Busan Korea.

(48) M. Kato, On uniform non-1¹-ness for direct sums of Banach spaces, Second International Workshop on Interpolation Theory, Function Spaces and Related Topics, Santiago de Compostela, Spain, July 18--22, 2011.

〔図書〕(計 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：

番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者 斎藤 吉助
(Kichi-Suke Saito)
(新潟大学・自然科学系) 教授

研究者番号：30018949

(2) 研究分担者 加藤 幹雄
(Mikio Kato)
(信州大学・工学部) 教授

研究者番号：50090551

研究分担者 羽鳥 理
(Osamu Hatori)
(新潟大学・自然科学系) 教授

研究者番号：70156363

研究分担者 三谷 健一
(Ken-Ichi Mitani)
(岡山県立大学情報工学部) 准教授

研究者番号：00468969

研究分担者 渡邊 恵一
(Keiichi Watanabe)
(新潟大学・自然科学系) 准教授

研究者番号：50210894

(3) 連携研究者 ()

研究者番号：