

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：13101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540190

研究課題名(和文) ヒルベルト空間上の荷重合成作用素のジョルダン型モデル理論に関する研究

研究課題名(英文) Research on Jordan type model theory of weighted composition operators on Hilbert spaces

研究代表者

渡邊 恵一 (Watanabe, Keiichi)

新潟大学・自然科学系・教授

研究者番号：50210894

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：可算無限次元ヒルベルト空間上の連続な荷重合成作用素に対して、正方行列のジョルダン標準形に相当する理論を構築することが目的であった。この研究の中で、順序を保存する作用素不等式、結合法則が必ずしも成り立たない代数および双曲幾何との関連が認識された。前者についてはフルタ型の作用素不等式の拡張を与え、また行列不等式を応用することによってある種の多項式間の微妙な関数不等式を発見し証明した。後者については任意の実内積空間の球がジャイロ可換なジャイロ群であるだけでなくジャイロベクトル空間の構造をもつことの初等的な手計算による証明を与え、この分野の初等的アプローチによる研究の可能性を示した。

研究成果の概要(英文)：It was the purpose of this project to construct a theory for continuous weighted composition operators on countably infinite dimensional Hilbert spaces corresponding to Jordan normal form of square matrices. While carrying out this project, we recognized relations with order preserving operator inequalities, nonassociative algebras and hyperbolic geometry. We gave some extensions of operator inequalities of Furuta type, and discovered and proved functional inequalities between certain kind of polynomials by applying matrix inequalities. Furthermore, we gave an elementary proof by hand calculation of that the balls in arbitrary real inner product spaces are not only gyrocommutative gyrogroup but also enjoying structure of gyrovector spaces, and it shows possibility of research by elementary approach of this subject.

研究分野：関数解析学

キーワード：operator inequality operator theory gyrogroup gyrovector space

1. 研究開始当初の背景

複素ヒルベルト空間上のすべての有界線形作用素が自明でない不変部分空間をもつか？という未解決問題がある。不変部分空間は直交分解を通じて作用素の三角行列表示をもたらすので、上記の問題は、ジョルダン標準形の類似物を求める問題を簡易にしたものとみなすことができる。正規作用素はスペクトル測度による積分として表され、それは正規行列の対角化を拡張したものである。正方行列のジョルダン標準形を一般の有界線形作用素に拡張した十全なモデル理論はまだ無いが、次のようなことは知られている。正規と限らない有界線形作用素は、その作用素ノルムの逆数をかけるとノルム 1 となる。ノルム 1 の線形作用素はユニタリと完全非ユニタリの直和に一意分解され、ユニタリはスペクトル分解によって十分に分かるので、完全非ユニタリな線形作用素が問題である。それらはべき乗の振る舞いによって分類され、例えばナジーとフォイヤシによる 1970 年の基本的文献でそれまでの結果が提示されており、また 2010 年の第 2 版でその後の進展が記されている。一方、ある可分バナッハ空間の上の有界線形作用素で自明な不変部分空間をもたないようなものの存在も知られている。

2. 研究の目的

可算無限次元ヒルベルト空間上の有界な荷重合成作用素に限定して、正方行列のジョルダン標準形に相当するような理論を構築する。荷重合成作用素のクラスは大変広く、任意の有界線形作用素というように抽象的ではなく、構成要素となる合成シンボル関数と荷重シンボル関数を用いて、合成と各点積によって具体的に構成される作用素であって、シンボル関数の言葉によって作用素の構造解析が期待されるものである。まず荷重合成作用素のノルムを求め、その逆数をかけた作用素の完全非ユニタリ部分を求め、それがクラス C_0 に属するための条件を求め、そのときのジョルダンモデルを明示的に求めることを目的とする。ここで「求める」というのは、シンボル関数の言葉によって具体的に書き表すということの意味する。また、完全非ユニタリ作用素がクラス C_0 に属するとは、その H 関数カルキュラスが零作用素になるような関数が存在することをいう。

3. 研究の方法

これは数学の研究なので、背景や研究目的に現れる問題意識をもとに、どのような定理が成り立つかを予想し、その命題が真であればそれを証明し偽であれば反例をあげる、という作業を可能な限り繰り返して理論を展開し、初めの問題を解決しようとする。国内外の単行本や論文によってこれまでのそのような試みを調べ尽くし、まだ試されていない方法を有力と思われるものから順に試して

ゆく。国内外の研究者との情報交換・研究打ち合せ、学会・研究集会・セミナー等での聴取・発表・討議を通じて、研究代表者・研究分担者だけではそれまで気付かなかったアイデア、知らなかった知見を得、研究の進捗状況を客観的に測り、気付かなかった発展の可能性やカバーされていない事象を認識し、中間的結果を研究者間の交流で打ち合わせて研究の現状を常に顧み、必要に応じて計画の拡張や修正を図る。また、この研究を行うことによって新たに派生する問題の解決を図る。さらに、他の分野や話題との関係の発見を試み、これまでにない応用の可能性を探る。

4. 研究成果

この研究の中で、2012 年度までに、順序を保存する作用素不等式の研究との関連が認識されるようになった。また、2014 年度までに、結合法則が必ずしも成り立たない代数および双曲幾何の研究との関連が認識されるようになった。前者についてはフルタ型の作用素不等式の拡張を与え、また行列不等式を応用することによってある種の多項式の間微妙な関数不等式を発見し証明した。これは不等式の新たな組織的発見・証明方法を与えるものである。さらに上記の関数不等式が、シュアー、ハーディ・リトルウッド・ポリア、カラマタによるマジヨリゼーションによる凸関数の特徴付け定理からも導かれることを示し、それらの間の関係を明らかにした。また、グランドフルタ不等式を成立させるパラメータの範囲についての解明を進展させた。後者については任意の実内積空間の球がジャイロ可換なジャイロ群であるだけでなくジャイロベクトル空間の構造をもつことの初等的な手計算による証明を与え、この分野の初等的アプローチによる研究の可能性を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 31 件)

K. Watanabe, A confirmation by hand calculation that the Mobius ball is a gyrovector space, *Nihonkai Math. J.*, 掲載決定. 査読有.

O. Hatori, Extension in the generalized gyrovector spaces of the positive cone, the proceedings volume based on the Workshop Recent Methods and Research Advances in Operator Theory and the AMS Special Session on Advances in Operator Theory and Applications, 掲載決定. 査読有.

O. Hatori, Commuting pairs of

self-adjoint elements in C^* -algebras, *Mathematica Slovaca*, 掲載決定. 査読有.

T. Abe and O. Hatori, On a characterization of commutativity for C^* -algebras via gyrogroup operations, *Period. Math. Hungar.* 72 (2016), no. 2, 248-251. 査読有.

T. Abe and O. Hatori, Generalized gyrovector spaces and a Mazur-Ulam theorem, *the Publicationes Mathematicae Debrecen* 87 (2015), 393-413. 査読有.

O. Hatori, Commuting pairs of normal operators, *Nihonkai Math. J.* vol.26 no. 2 (2015), 85-90. 査読有.

O. Hatori, Isometries on the special unitary group, *Contemp. Math.* vol. 645 (2015), 119-134. 査読有.

N. Komuro, K.-S. Saito, K.-I. Mitani and R. Tanaka, On the convexity of von Neumann-Jordan constant, *J. Nonlinear Convex Analysis* 16(2015), No.11, 2263-2268. 査読有.

K. Watanabe, On the range of the parameters for the Grand Furuta inequality to be valid, *J. Inequal. Appl.* 2014, 2014:297, 10 pp. 査読有.

K. Watanabe, On the range of the parameters for the grand Furuta inequality to be valid II, *J. Math. Inequal.* 8 (2014), no. 3, 673--683. 査読有.

K. Watanabe, A certain functional inequality derived from an operator inequality, *J. Math. Inequal.* 8 (2014), no. 1, 69--81. 査読有.

O. Hatori, Isometries of the unitary groups in C^* -algebras, *Studia Math.* 221 (2014), no. 1, 61--86. 査読有.

O. Hatori, A. Jimenez-Vargas and Moises Villegas-Vallecillos, Maps which preserve norms of non-symmetrical quotients between groups of exponentials of Lipschitz functions, *J. Math. Anal. Appl.* 415(2014), no. 2, 825-845. 査読有.

O. Hatori and L. Molnar, Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C^* -algebras, *J. Math. Anal. Appl.* 409 (2014), no. 1, 158--167. 査読有.

R. Tanaka and K.-S. Saito, Orthogonal bases and a structure of finite dimensional normed linear spaces, *Banach J. Math. Anal.* 8 (2014), no. 1, 89-97. 査読有.

K. Watanabe, On a relation between Schur, Hardy-Littlewood-Polya and Karamata's theorem and an inequality of some products of $x^p - 1$ derived from the Furuta inequality, *J. Inequal. Appl.* 2013, 2013:137, 7 pp. 査読有.

T. Koizumi and K. Watanabe, Another consequence of Tanahashi's argument on best possibility of the grand Furuta inequality, *Cent. Eur. J. Math.* 11 (2013), no. 2, 368--375. 査読有.

O. Hatori and T. Miura, Real linear isometries between function algebras. II, *Cent. Eur. J. Math.* 11 (2013), no. 10, 1838--1842. 査読有.

T. Abe, S. Akiyama and O. Hatori, Isometries of the special orthogonal group, *Linear Algebra Appl.* 439 (2013), no. 1, 174--188. 査読有.

H. Mizuguchi, K.-S. Saito and R. Tanaka, On the calculation of the Dunkl-Williams constant of normed linear spaces, *Cent. Eur. J. Math.* 11 (2013), no. 7, 1212-1227. 査読有.

②① T. Koizumi and K. Watanabe, On monotonicity of some operator functions related to order preserving operator inequalities, *J. Math. Inequal.* 6 (2012), no. 4, 579--587. 査読有.

②② K. Watanabe, An application of matrix inequalities to certain functional inequalities involving fractional powers, *J. Inequal. Appl.* 2012, 2012:221, 9 pp. 査読有.

②③ K. Watanabe, On a simple range of parameters of the grand Furuta

inequality, Int. Math. Forum 7 (2012), no. 57-60, 2897--2902. 査読有.

- ②4 T. Koizumi and K. Watanabe, A remark on extension of order preserving operator inequality, J. Math. Inequal. 6 (2012), no. 1, 119--124. 査読有.
- ②5 O. Hatori and K. Watanabe, Isometries between groups of invertible elements in C^* -algebras, Studia Math. 209 (2012), no. 2, 103--106. 査読有.
- ②6 O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura and L. Molnar, Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups, Tokyo J. Math. 35 (2012), no. 2, 385--410. 査読有.
- ②7 O. Hatori, New criteria for equivalence of locally compact abelian groups, J. Group Theory 15 (2012), no. 2, 271--277. 査読有.
- ②8 O. Hatori, K. Kobayashi, T. Miura and S.-E. Takahasi, Reflections and a generalization of the Mazur-Ulam theorem, Rocky Mountain J. Math. 42 (2012), no. 1, 117--150. 査読有.
- ②9 O. Hatori, Y. Iida, S. Stevic and S.-I. Ueki, Multiplicative isometries on F-algebras of holomorphic functions, Abstr. Appl. Anal. 2012, Art. ID 125987, 16 pp. 査読有.
- ③0 K. Saito and M. Tominaga, A Dunkl-Williams inequality and the generalized operator version, Internat. Ser. Numer. Math. 161, Birkhäuser/Springer, Basel, (2012) 137-148. 査読有.
- ③1 T. Koizumi and K. Watanabe, On best possibility of an extension of the Furuta inequality, Int. J. Funct. Anal. Oper. Theory Appl. 3 (2011), no. 2, 155--161. 査読有,

〔学会発表〕(計 32 件)

渡邊恵一, 位数の小さいジャイロ群について, 関数環研究集会, 2015年12月20日, 新潟大学駅南キャンパスときめいと, 新潟県新潟市.

渡邊恵一, ジャイロベクトル空間につい

て, 作用素論・作用素環論研究集会, 2015年10月24日, KKR 妙高高原 白樺荘, 新潟県妙高市.

渡邊恵一, ジャイロベクトル空間入門, 第8回数物研究会, 2014年9月20日, 立命館大学東京キャンパス, 東京都.

渡邊恵一, グランドフルタ不等式の拡張、最良性について, 作用素論・作用素環論研究集会, 2013年11月21日, お茶の水女子大学, 東京都.

渡邊恵一, グランドフルタ不等式が成立するパラメータの範囲について, 関数環研究集会, 2012年11月12日, 日本大学理工学部, 東京都.

渡邊恵一, On functional inequalities derived from operator inequalities of Furuta type, RIMS 研究集会「幾何学および確率論的手法による作用素の構造解析の研究」, 2012年11月6日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市.

渡邊恵一, $x^p - 1$ の積の間の不等式について, 日本数学会秋季総合分科会, 2012年9月20日, 九州大学, 福岡県福岡市.

渡邊恵一, フルタ不等式に関する最近の結果について, 第6回数物研究会, 2012年9月13日, 富山県民会館, 富山県富山市.

渡邊恵一, 行列不等式から導かれるある種の関数不等式について, 米沢数学セミナー, 2012年6月27日, 山形大学工学部, 山形県米沢市.

渡邊恵一, ある作用素不等式に関する作用素関数の単調性について, 日本数学会年会, 2012年3月27日, 東京理科大学理学部, 東京都.

渡邊恵一, 一般化されたフルタ型不等式の成立に関するパラメータの範囲について, 日本数学会年会, 2012年3月27日, 東京理科大学理学部, 東京都.

渡邊恵一, 行列不等式の、ある種の関数不等式への応用について, つくばセミナー, 2012年3月5日, 筑波大学自然科学系, 茨城県つくば市.

T. Koizumi and K. Watanabe, On monotonicity of some operator functions related to order preserving operator inequalities, 第 20 回関数空間セミナー, 2011 年 12 月 25 日, 北海道大学, 北海道札幌市.

渡邊恵一, 順序を保存する作用素不等式の拡張に関する最近の結果について, 7 階セミナー, 2011 年 12 月 16 日, 早稲田大学教育学部, 東京都.

渡邊恵一, On further extension of order preserving operator inequality, RIMS 研究集会「スペクトル、数域などの作用素の幾何的特性量を用いた作用素の構造研究」, 2011 年 11 月 14 日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市.

K. Watanabe, On recent results of order preserving operator inequalities, RIMS 共同研究「Banach 環に関わる preserver problems の研究とその応用」, 2011 年 11 月 2 日, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市.

渡邊恵一, 順序を保存する作用素不等式のある拡張について, 日本数学会秋季総合分科会, 2011 年 9 月 30 日, 信州大学理学部, 長野県松本市.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者
渡邊 恵一 (WATANABE, Keiichi)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号: 50210894

(2) 研究分担者
泉池 敬司 (IZUCHI, Keiji)
新潟大学・自然科学系・フェロー
研究者番号: 80120963

斎藤 吉助 (SAITO, Kichi-Suke)
新潟大学・自然科学系・フェロー
研究者番号: 30018949

羽鳥 理 (HATORI, Osamu)
新潟大学・自然科学系・教授
研究者番号: 70156363

(3) 連携研究者
()

研究者番号: