

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 9 日現在

機関番号：13301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540191

研究課題名(和文)経路積分的考察による量子力学のプロパゲイターに係わる研究

研究課題名(英文)Path integral approach to quantum mechanical propagators

研究代表者

一瀬 孝 (ICHINOSE, TAKASHI)

金沢大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：20024044

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では、量子力学のプロパゲイター、即ち、シュレーディンガーユニタリ群の積分核、グリーン関数、また虚数時間版のシュレーディンガー半群の熱核を念頭に置いている。この研究では、とりわけ、3つの相異なる磁場付き相対論的シュレーディンガー半群を考え、経路の空間上のレヴィ過程に基づく確率測度による(虚数時間)経路積分表示を確立し、その異なる特徴を明らかにした。また、他の話題、ソレノイド磁場量子散乱におけるアハラノフ・ボーム効果のレゾナンスへの関与や、ベクトル値関数に関する、右辺にディラック作用素に係わるセミノルムを持つ改良ソボレフ不等式についても論じた。

研究成果の概要(英文)：This research deals with the quantum-mechanical propagator, namely, the integral kernel of the Schroedinger unitary group, Green function as well as the heat kernel of the Schroedinger semigroups as its imaginary-time version. In this work, among others, we have considered three different magnetic relativistic Schroedinger semigroups and establish (imaginary-time) path integral representations with the probability measure on the path space connected with the Levy process to clarify their different nature.

Some other topics are also dealt with on influence to resonance of Aharanov-Bohm effect for solenoidal magnetic field quantum mechanical scattering, and on an improved Sobolev inequality for vector-valued functions whose right-hand side has a seminorm involving Dirac operator.

研究分野：関数方程式

キーワード：関数方程式 経路積分 プロパゲイター トロッター積公式 トロッター・加藤積公式 相対論的シュレーディンガー作用素 レヴィ過程 アハラノフ・ボーム効果

1. 研究開始当初の背景

量子力学のプロパゲイターとは、シュレーディンガーユニタリ群の積分核、グリーン関数、また虚数時間版のシュレーディンガー半群の熱核を念頭に置いている。相対論的シュレーディンガー作用素、ディラック作用素の場合についても考える。これらは、ファインマン(Feynman)の経路積分的な表示を持つことが期待される。

本研究課題は、当初は、次の4つ

(A)量子力学のプロパゲイターを Trotter 積公式として与える研究の継続等、
(B)非可換調和振動子の熱核を経て得られるスペクトルゼータ関数の研究の継続、
(C)磁場付き相対論的シュレーディンガー半群の経路積分表示に関する研究、
(D)シュレーディンガー作用素の一番下端のスペクトルギャップを求める新しい手法の数学、

であった。後から、次の2つ

(E)スカラー値関数の場合の所謂「改良 Sobolev 埋蔵定理」をベクトル関数の場合への拡張、
(F)ソレノイド磁場量子散乱におけるアハラノフ・ボーム(Aharonov-Bohm)効果のレゾナンスへの関与、

も加えた。

2. 研究の目的

(A) 2つの非負自己共役作用素 A, B の和として作用素和ではなく、2次形式和を考えたときの次の2つの未解決問題の追及。1つは、作用素ノルム自己共役 Trotter-Kato 積公式に関する Ichinose-Neidhardt-Zagrebnov [J. Funct. Analysis 2004] の結果を、一方(B)が他方(A)よりある意味で小さいという条件を取り除いた改良ができないか。もう1つは、2次形式和の場合の究極的なユニタリ Trotter 積公式が成り立たつかどうか。
(B) 非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数についての一瀬・若山[Commun. Math. Phys. 2005]の結果を超える更なる探求。
(C) 文献では、磁場付き相対論的シュレーディンガー作用素には(一般には)互いに相異なる)3種類ある。対応する古典的ハミルトニアン表象

$$\left[\left(-\Delta - A(x) \right)^2 + m^2 \right]^{1/2} - m + V(x)$$
の第1項をなす運動エネルギー部分の量子化の仕方に依る。1つ目は、一瀬・田村[Commun. Math. Phys. 1986]で考察したワイル量子化したもの $H^{\wedge}(1)$ 、2つ目は1つ目を修正した Iftimie-Mantoiu-Purice [Publ. RIMS Kyoto Univ. Vol.1986]の考案によるもの $H^{\wedge}(2)$ 、3つ目は自己共役作用素 $(-i\Delta - A(x))^2 + m^2$ の $1/2$ 乗として関数解析的に定

義したもの $H^{\wedge}(3)$ 。上述の3つの磁場付き相対論的シュレーディンガー作用素半群の虚数時間経路積分表示を確立する。

(D)経路積分(汎関数積分)的考察を経た繰り込み群的アプローチを行う。

(E)埋蔵を与える不等式の右辺のグラディエントをディラック作用素に置き換えられないか。

(F)2次元ソレノイド磁場付きシュレーディンガーのレゾルベントの実軸近傍に現れるレゾナンスへの関与をみること。

3. 研究の方法

(1) (A,B,C,D,E,F)の各々について:

(A)誤差評価の精緻化。
(B)非可換調和振動子のスペクトルゼータ関数の有理型関数表示の精緻化。
(C)レヴィ(Lévy)過程の諸性質に注目する。3つ目の相対論的シュレーディンガー作用素に対しては、そのレヴィ過程がブラウン運動から Bochner 従属操作で得られることを用いる。

(D)関係する繰り込み群の非線形方程式を解くこと。

(E)再配分(rearrangement)のテクニックを使う。

(F)2つ、及び、3つのソレノイド磁場を与えるベクトルポテンシャルを持つ2次元シュレーディンガー作用素のレゾルベントを1つのソレノイド磁場の場合の exact な結果をもとに摂動的に構成する。

(2)本科研費から渡航旅費の一部サポートを得て、海外の次の研究機関で作用素ノルム Trotter・加藤積公式について共同研究を行うことができ成果があった:

ワイエルシュトラス応用解析・確率解析研究所 (Weierstrass Institut für Angewandte Analysis und Stochastik), Berlin, ドイツ:

2012年6月18日-2012年7月15日。

国際数学会合センター (Centre International de Rencontres Mathématiques), Luminy, Marseille, フランス:

2013年5月6日-2013年5月26日。

ワイエルシュトラス応用解析・確率解析研究所 (Weierstrass Institut für Angewandte Analysis und Stochastik), Berlin, ドイツ:

2013年8月4日-2013年8月16日。

ミッターク・レフラー研究所 (Mittag-Leffler Institut), Stockholm, スウェーデン:

2014年7月14日-2014年8月2日。

4. 研究成果

(1)まず、課題(C)に関して:

$H^{\wedge}(1)$ は、所謂「中点処方」によるワイル量子化のため自己共役性・ユニタリ性が自然

に導かれ、経路積分とよくマッチし物理学では周知の方法であったが、表象が に関して多項式でないのでゲージ変換共変ではなかった。 $H^{\{2\}}$, $H^{\{3\}}$ はゲージ変換で共変である。 $H^{\{3\}}$ は、ゲージ変換で共変であるためか、Elliott H. Lieb (Princeton) を始めその周辺の人達は相対論を考慮した物質の安定性(Stability of Matter) の研究によく用いている。 $H^{\{3\}}$ については、DeAngelis- Serva (J. Phys. A: Math. Gen. Vol.23, 1990) の寄与がある。

一瀬は、上述の3つの相異なる磁場付き相対論的シュレーディンガー作用素半群の虚数時間経路積分表示をまとめその違いを明らかにした。論文は Lett. Math. Phys. 誌(2012)に出版され、また、本成果のテーマ及びその周辺を詳述する入門的レビュー論文が Springer 社(2013)から出版された。

一瀬は、村山太郎(金沢大・自然研)と共に、上述の3つの相対論的シュレーディンガー作用素半群の内のひとつであるワイル量子化の場合に、粒子質量が零に近づくときの極限問題をレヴィ過程の極限定理として確率論的に証明し、共著論文を Proc. Japan Acad. 誌(2014) に書いた。より一般の条件のもとに、他の2つの相対論的シュレーディンガー作用素半群の場合についても、ごく最近村山太郎によって解決された。

一瀬は、廣島文生(九大数理), József Lőrinczi (Loughborough 大, 英)との共同研究によって、ラプラス作用素のペルンシュタイン関数を経て与えられるレヴィ過程の生成作用素達の半群を経路の空間上のレヴィ過程測度に基づく、虚数時間経路積分表示を行う研究を完成した。レヴィ過程をブラウン運動からの Bochner の従属操作即ち時間変更法で行った。2編の論文を Rev. Math. Phys. 誌(2012), 及び, Publ. RIMS Kyoto University 誌(2012) に出版。尚、上の(1)で述べた3つ目のゲージ変換共変な磁場付き相対論的量子化シュレーディンガー作用素はこの範疇のものである。

(2)(E)に関して:一瀬は齊藤義実(Alabama 大, 米)との共同研究による、スカラー値関数の場合の「改良ソボレフ埋蔵定理」をベクトル値関数の場合に拡張した論文を、Funkcialaj Ekvacioj 誌(2014)に出版。埋蔵を表す不等式の右辺のスカラー値関数のグラードイアントセミノルムをベクトル値関数のディラック作用素のある成分から決まるセミノルムに置き換えた。

(3)課題(F)に関して:研究分担者 田村英男(岡山大)は、磁場を持つ2次元シュレーディンガー方程式のソレノイド磁場(デルタ型磁場)による散乱問題において、捕捉現象から

実軸近傍に生成されるレゾナンスに、アハラノフ・ボーム効果がいかに関与するかについて解明を行い、2つのソレノイド磁場の場合の結果を Adv. Math. 誌(2014) に、更に最近、3つソレノイド磁場の場合の結果の速報を Proc. Japan Acad. 誌(2014)に出版した。経路積分的アプローチからも試みてみたい結果である。

(4)課題(B)に関して、非可換調和振動子ではないが、それとよく似た、ラビ(Rabi)模型と呼ばれる(1モード光子と相互作用する2準位原子の)量子光学のハミルトニアン固有値の評価やゼータ関数の計算を行った。非可換調和振動子より幾分扱い易い感触。また、課題(A),(D)については、それを進める時間がなかった。今後の研究課題としたい。

5. 主な発表論文等
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計8件)

Takashi Ichinose, Taro Murayama, The zero-mass limit problem for a relativistic spinless particle in an electromagnetic field, Proc. Japan Acad., 査読有, Vol. 90, 2014, Ser.A, 60--65. DOI: 10.3792/pjaa.91.45

Takashi Ichinose, Yoshimi Saitō, Improved Sobolev embedding theorems for vector-valued functions, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有, Vol.57,2014, 245-295. <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~fe/>

Fumio Hiroshima, Takashi Ichinose, József Lőrinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound states of relativistic Schrödinger operators with spin 1/2, Publ. RIMS Kyoto University, 査読有, Vol. 49, 2013, no. 1, 189--214. DOI 10.4171/PRIMS/102

Takashi Ichinose, Imaginary-time path integrals for three magnetic relativistic Schrödinger operators, "Introductory Workshop on Feynman Path Integral and Microlocal Analysis", 数理解析研究所講究録 No.1797, 2012, 1--19, 京都大学数理解析研究所. <http://hdl.handle.net/2433/172956>

Takashi Ichinose, On three magnetic relativistic Schrödinger operators and imaginary-time path integrals, Lett. Math. Phys., 査読有, Vol. 101, 2012, 323--339.

DOI 10.1007/s11005-012-0571-8

Fumio Hiroshima, Takashi Ichinose,
József Lőrinczi,
Path integral representation for
Schrödinger operators with Bernstein
functions of the Laplacian, *Reviews in
Mathematical Physics*, 査読有, Vol. 24,
2012, 1250013 (40 pages).
DOI: 10.1142/S0129055X12500134

Hideo Tamura, Aharonov-Bohm effect in
resonances by three solenoids, *Proc. Japan.
Acad.*, 査読有, Vol.91, 2015, Ser.A, 45-49.
DOI: 10.3792/pjaa.91.45

Ivana Alexandrova, Hideo Tamura,
Resonances in scattering by two magnetic
fields at large separation and a complex
scaling method, *Adv. Math.*, 査読有,
Vol.256, 2014, 398-448.
DOI: org/10.1016/j.aim.2014.01.022

[学会発表](計15件)

一瀬孝, Spectral properties of Rabi
model Hamiltonian and non-commutative
harmonic oscillator,
Workshop "Mathematics and Physics of
Interacting Quantum Systems",
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所,
福岡県福岡市[2014.10.23-2014.10.24] 2014
年10月24日講演

一瀬孝, On three imaginary-time path
integral formulas with magnetic fields in
relativistic quantum mechanics,
RIMS Joint Research,
"Introductory Workshop on Path Integrals
and Pseudo-Differential Operators",
京都大学数理解析研究所, 京都府京都市
[2014.10.7-10.10] 2014年10月9日に講演

一瀬孝, On Kato's Inequality for the
relativistic Schrödinger operators with
magnetic fields,
RIMS 研究集会「量子場の数理解析とその周辺」,
京都大学数理解析研究所, 京都府京都市
[2014.10.6-10.8] 2014年10月6日に講演

一瀬孝, On Kato's inequality for the
relativistic Schrödinger operator
 $[(-i \partial - A(x))^2 + m^2]^{1/2}$,
2014 夏の作用素論シンポジウム, JR 長浜:
セミナー&カルチャーセンター臨湖(勤労者
福祉会館), 滋賀県長浜市
[2014.9.5-9.8]2014年9月8日に講演

一瀬孝・村山太郎(金沢大自然), 電磁場
内の相対論的スピンなし量子力学的粒子に

対する零質量極限問題,
2014 日本数学会年会(学習院大学), 統計数
学, 東京都豊島区 [2014.3.15-2014.3.18]
2014年3月15日(村山太郎が講演)

一瀬孝, On three magnetic relativistic
Schrödinger operators and imaginary-time
path integrals,
「2012年夏の作用素論シンポジウム」, 新潟
大学 駅南キャンパス「ときめいと」, 新潟県
新潟市[2012.9.7-2012.9.10]2012年9月10
日に講演

Takashi Ichinose, On improved Sobolev
embedding theorems for vector-valued
functions,
Berliner Oberseminar Nichtlineare
partielle Differentialgleichungen
(Langenbach-Seminar), Weierstrass
Institut für Angewandte Analysis und
Stochastik, Berlin, ドイツ, 2012年6月
27日

一瀬孝, On improved Sobolev embedding
theorems for vector-valued functions,
International Workshop "Avoided?
Crossing of Eigenvalue Curves" ---
Non-commutative Harmonic Oscillator,
Special Function and Number Theory ---,
九州大学伊都キャンパス稲盛センター, 福
岡県福岡市 [2012.3.7-2012.3.9] 2012年3
月7日に講演

一瀬孝, On improved Sobolev embedding
theorems for vector-valued functions,
東北大学数学教室 解析月曜セミナー, 宮城
県仙台市 2012年1月16日

一瀬孝, Three magnetic relativistic
Schrödinger operators and imaginary-time
path integrals (3つのシュレーディンガー
作用素と虚数時間経路積分),
東京理科大学理工学部 数学科談話会
/Seminar, 千葉県野田市 2011年11月4日

Takashi Ichinose, Three magnetic
relativistic Schrödinger operators
and imaginary-time path integrals,
Oberseminar "Analysis of Partial
Differential Equations",
Mathematisches Institut, Universität
Göttingen, ドイツ, 2011年9月23日

Takashi Ichinose, Three magnetic
relativistic Schrödinger operators
and imaginary-time path integrals,
Séminaire Dynamique Quantique et
Classique, Centre de Physique Théorique
UMR 6207, Luminy/ Marseille, フランス,
2011年9月21日

Takashi Ichinose, Three magnetic relativistic Schrödinger operators and imaginary-time path integrals, International Conference "Mathematical Physics, Spectral Theory and Stochastic Analysis", Goslar, ドイツ, [2011.9.11-2011.9.15]2011年9月15日に講演

Takashi Ichinose, Imaginary-time path integrals for three magnetic relativistic Schrödinger operators, RIMS Joint Introductory Workshop on Feynman Path Integral and Microlocal Analysis, 京都大学数理解析研究所, 京都府京都市 [2011.6.21-2011.6.24] 2011年6月21日, 24日に講演

田村英男, Aharonov-Bohm effect in resonances of magnetic Schrodinger operators in two dimensions, Plenary lecture, The 6th Pacific RIM Conference on Mathematics 2013, Sapporo, [2013.7.1--2013.7.5] 2013年7月1日に講演

〔図書〕(計1件)

Takashi Ichinose, Magnetic relativistic Schrödinger operators and imaginary-time path integrals, In: Mathematical Physics, Spectral Theory and Stochastic Analysis, Operator Theory:Advances and Applications (Advances in Partial Differential Equations), 査読有, Vol. 232 [eds.: M. Demuth, W. Kirsch], pp.247-297 (51 pages), 2013 Springer Basel AG.
<http://hdl.handle.net/2433/172956>

6. 研究組織

(1)研究代表者 一瀬 孝
(ICHINOSE, Takashi)

金沢大学・その他部局等・名誉教授
研究者番号：20024044

(2)研究分担者 田村 英男
(TAMURA, Hideo)

岡山大学・自然科学研究科・特命教授
研究者番号：30022734