

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 20 日現在

機関番号：10101

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540197

研究課題名(和文) 群のユニタリ表現の分解と分岐グラフ上の調和関数の研究

研究課題名(英文) Study on decomposition of unitary representations of groups and harmonic functions on branching graphs

研究代表者

洞 彰人 (Hori, Akihito)

北海道大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：10212200

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：莫大な数の要因が絡み合う複雑な現象の解明に資することを念頭に置いて、巨大な群上の調和解析の展開を目指すため、巨大な群の表現の分解を明快に記述する具体的な枠組と手段を整備することが、本研究の課題である。無限対称群や無限複素鏡映群を含むクラスのコンパクト群の環積を主な舞台として、確率論的、表現論的、ポテンシャル論的アプローチの連関のもとに、群の指標公式とその特徴づけ、分岐グラフの境界と極小調和関数、経路空間上のエルゴード的測度の記述に関し、具体的に詳細な結果を得た。

研究成果の概要(英文)：We intend to develop harmonic analysis on a large group, which plays a role in clarifying complex phenomena involving a huge number of factors. Our project aims at establishing a concrete framework by which one clearly understands decomposition of representations of a large group. For wreath products of a compact group, including the infinite symmetric group and infinite complex reflection groups, we took interactive approach from probability theory, group representations and potential theory, and obtained concrete and detailed results on such objects as group character formulas and their characterization, boundaries of the branching graph and minimal harmonic functions, and description of ergodic probabilities on the path space of the graph.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、基礎解析学

キーワード：関数解析 調和解析 確率論 表現論

1. 研究開始当初の背景

巨大な群上の調和解析を展開するための具体的なモデルとして、ある種の群の因子表現や既約表現の分類空間の特徴づけ、およびユニタリ表現の因子分解や既約分解を記述する測度の研究が考えられる。海外でこのような巨大な群上の調和解析を指向した研究を活発に行っているのは、ロシアの G. Olshanski, A. Vershik, アメリカの A. Okounkov, A. Borodin, フランスの P. Biane といった人々とその周辺である。中でも、確率論特にランダム行列や点過程の観点に基づいた具体的な研究が進展している。もっとも特徴的なのは、Olshanski たちが導入したいわゆる z -測度にまつわる詳細な研究であろう。無限対称群の正則表現はそれ自体が因子表現であるが、それに対応する分岐グラフの経路空間上の Plancherel 測度は、1970 年代より現在に至るまで、興味深い題材を提供し続けている。その正則表現に簡単なコサイクルによる捻りを加えた一般化された正則表現に伴う Plancherel 測度の変形が z -測度である。一般化された正則表現の因子分解は、無限次元の Thoma 単体上の境界 z -測度によって記述される。こういう方面の研究では、残念ながらわが国は少なからず水をあけられている状況だと言わざるを得ないが、研究代表者はこれらの研究者たちの何人かと以前から交流を持ってきたし、少し視野を広げて新しい観点を取り入れれば、わが国においても独自の研究拠点を形成してこの新しいタイプの調和解析の展開を進めることは十分可能であると考えられる。実際、わが国の確率論研究者の中に、若手を中心として群の表現論に関心を持つ人々が急速に増えつつある。この趨勢は、本研究においても積極的に考慮に入れていくべき要素である。

2. 研究の目的

ある種の巨大な群のユニタリ表現の因子分解および既約分解をできる限り具体的に記述するという基本的な問題に取り組む。すなわち、分解の素子となる因子表現および既約表現を良いパラメータづけによって完全に分類すること、そして分解の法則を定める測度を具体的に求めることが目的である。巨大な群に対しては、分類パラメータ全体は一般に無限次元の空間をなす。このような無限次元空間上の測度の記述のためにはもちろん、因子表現や既約表現の特徴づけにおいても、確率論的な方法がたいへん有効であるので、研究全体を通してその観点を重視する。

ここに言う巨大な群とは、無定義用語であってそれ自体が進化してゆくべき概念であるが、典型例として念頭にあるのは、無限対称群、無限次元ユニタリ群、あるいはそれらの A 型以外への拡張である。これらの群は、I 型でない(したがってユニタリ表現の既約

分解の一意性が言えない)こと、因子表現の分類空間が無限次元であること、連続群ならば局所コンパクトでないこと等、感覚的に巨大な群と呼ぶにふさわしい。このような群の既約ユニタリ表現をすべて数え上げることは、古典的な調和解析の枠組を大きくはみ出す困難さを内包して、雲をつかむような話である。しかし、ひとたび確率論や統計力学との関連に目を転ずれば、ある巨大な群の特別なユニタリ表現の特別な分解が得られれば、それ自体がたいへん興味深い確率論のモデル(無限次元空間の測度、点過程、無限次元 Markov 過程等)を提供する可能性がある。このような視座に基づき、巨大な群上の調和解析の研究を推進するための有効な拠点となるモデルを構築することが、本研究の第一の目的である。

3. 研究の方法

本研究では、コンパクト群の帰納極限として現れる位相群を手掛かりにする。中でも、無限対称群や無限複素鏡映群を含むクラスであるコンパクト群の無限環積が重要な対象になる。既約表現の制限や誘導の既約分解を各レベルで考えることにより、群の分岐グラフが構成される。それは群の双対的な対象である。群のあるクラスのユニタリ表現、群上の正定値関数、分岐グラフ上の調和関数、分岐グラフの経路空間上のある種の確率測度の間にはきれいな対応関係があり、それぞれの中で素子となる対象(端点)を特定する作業がまず必要である。本研究では、群のユニタリ表現を調べるに際して、分岐グラフ上のポテンシャル論や経路空間上の確率論の方法を駆使する。この観点からすれば、分岐グラフの Martin 境界を特定し、調和関数の Martin 積分表示を確立することが、重要なステップになる。本研究の目指すところは、確率論や統計力学と密接に絡んだ具体的なモデルの構築と解析であるので、抽象的な枠組みを越えて、Martin 境界の良いパラメータづけの発見、良い調和関数の表示、Martin 積分表示を与えるスペクトル測度の明示的な構成手順を明らかにしていく。

本研究は I 型でない巨大な群の表現の分解のメカニズムを解明することを目指し、それに向けて確率論との関わりを強く意識しながら、研究課題に取り組むものである。したがって、群の表現論と確率論の深いレベルでの融合が必要になる。この目的のため、少数精鋭の研究分担者と連携研究者から成る研究組織を整えた。広い視野を持って活発な研究を展開している実力者たちである。本研究では、これらの研究者との密接な連携が本質的な意味を持つ。研究経費は、研究打合せ、研究発表、研究情報の収集を目的とした旅費としての使用をはじめ、PC や研究用図書等の備品の購入、ソフトウェアの整備等のために、有効に活用した。

4. 研究成果

本研究では、次のような成果を得た。初年度は、無限対称群や無限鏡映群を含むクラスのココンパクト群の無限環積を舞台として、本研究の枠組を始動させた。群の指標や分岐グラフ上の調和関数および Martin 境界について、詳しい性質を調べた。次年度は、同じくコンパクト群の無限環積を主たる対象とし、帰納系の特性を利用して、分岐グラフの無限経路全体のなす空間上で、測度に基づく調和解析の展開を目指した。無限環積群の指標、分岐グラフの極小 Martin 境界、経路空間上のエルゴード的測度を一体として捉えた包括的な理解がかなり進んだ。最終年度は、無限環積群等の巨大な群上の調和解析に関してこれまでに行ってきた表現論的、確率論的、ポテンシャル論的アプローチの互いの連関を総括するとともに、一般の射影表現に主眼を置いた研究も遂行した。本研究で得られた成果は、数編の学術論文および著書にまとめ、出版済みあるいは出版予定である。

本研究が取り組んだ課題は、群の表現論においても確率論においても、それほど研究者層の厚くない分野に位置している。しかし、多少長い目で見れば、莫大な数の要因が絡み合う現実の複雑な事象の解明に挑む現代数学において、巨大な群上の調和解析によって得られる知見は、古典的な Fourier 解析の発展的継承ともいえる役割を担うと考えている。そのような新しい Fourier 解析の展開を可能にするくらいの群の表現に対する深い理解は、本研究が扱う対象においては、気が遠くなるほど先の話のように見える。本研究は、確率論的な観点・方法の利点を生かし、具体的な良いモデルの発掘を通して、着実に一歩ずつ踏み出そうというところに特色があった。相当程度の目に見える進展はあったものと考えているが、今後も具体的な諸問題の考察を通して、確率論と群の表現論を単に並列させるのではなく、この2つの数学の潮流の相互作用のあり方を観察・探究していきたい。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

Akihito Hora, Takeshi Hirai, Harmonic functions on the branching graph associated with the infinite wreath product of a compact group, Kyoto Journal of Mathematics, 査読有, 掲載予定

洞 彰人, ヤング図形のエルゴード的な統計集団における集中現象, 数理解析研究所講究録, 査読無, 1825, 2013, 75-90

[学会発表](計 8 件)

洞 彰人, Growth process of multi-diagrams, its Martin boundary, and characters of an inductive limit group, RIMS International Project Research 2012: Discrete Geometric Analysis, Markov Chains on Graphs and Related Topics, 2013 年 2 月 14 日, 京都大学

洞 彰人, ヤング図形のエルゴード的な統計集団における集中現象, 表現論と非可換調和解析の展望, 2012 年 6 月 20 日, 京都大学

洞 彰人, 平井 武, 平井 悦子, コンパクト群の環積の指標と分岐グラフの境界, 日本数学会年会函数解析学分会, 2012 年 3 月 29 日, 東京理科大学

洞 彰人, Limit shape problem in a group-theoretical ensemble of Young diagrams, Colloquium, 2012 年 3 月 16 日, Chungbuk National University

洞 彰人, Computing a probability measure from its free cumulants: deformation of the limit shape of Young diagrams, Analysis Seminar, 2012 年 3 月 15 日, Chungbuk National University

洞 彰人, ヤング図形の群論的統計集団における最尤形状について, 岡山解析確率セミナー, 2011 年 10 月 27 日, 岡山大学

洞 彰人, Harmonic functions on branching networks for some big groups, Sapporo Workshop on Noncommutative Analysis and Applications to Complex Phenomena, 2011 年 9 月 3 日, 北海道大学

洞 彰人, ヤンググラフ上の調和関数と無限対称群の表現, 離散幾何解析セミナー, 2011 年 7 月 1 日, 京都大学

[図書](計 1 件)

Takeshi Hirai, Akihito Hora, Etsuko Hirai, Mathematical Society of Japan, Projective representations and spin characters of complex reflection groups $G(m,p,n)$ and $G(m,p)$, 2013, 272(1-272)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

洞 彰人 (HORA, Akihito)

北海道大学・大学院理学研究院・教授

研究者番号: 10212200

(2)研究分担者

伊師 英之 (ISHI, Hideyuki)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授
研究者番号： 00326068

(3)連携研究者

松本 詔 (MATSUMOTO, Sho)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
助教
研究者番号： 60547553

尾畑 伸明 (OBATA, Nobuaki)
東北大学・大学院情報科学研究科・教授
研究者番号： 10169360