

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 4 月 11 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540199

研究課題名(和文) 2次特性的双曲型作用素とハミルトン写像およびハミルトン流

研究課題名(英文) Hyperbolic operators with double characteristics, Hamilton map and Hamilton flow

研究代表者

西谷 達雄 (Nishitani, Tatsuo)

大阪大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：80127117

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：二次特性点を持つ線形双曲型作用素の初期値問題の適切性に関して多くの顕著な結果を得ることができた。特に実効的双曲型から非実効的双曲型へ遷移する場合において、ハミルトン写像のスペクトルと初期値問題の適切性のための条件との間の関係を明らかにした。以上得られた多くの結果を論文として発表し、また数々の国際研究集会で発表した。

研究成果の概要(英文)：Much progress has been achieved on the well-posedness of the Cauchy problem for linear near hyperbolic operators with double characteristics. In particular in several transition cases from effectively hyperbolic to non-effectively hyperbolic, the relations between the spectral properties of the Hamilton map and the well-posedness conditions are clarified. I have published many such obtained results and also presented such results in several international meetings.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：hyperbolic operator Cauchy problem Hamilton map bicharacteristic well-posedness effectively hyperbolic Hamilton flow

1. 研究開始当初の背景

線形偏微分方程式研究における基本原理の一つは、線形偏微分方程式の解の特異性はハミルトン流に沿って不変である、という形で定式化されている。この原理はハミルトン流の特異点では何を主張しない。ハミルトン流が特異点を持つ場合の研究は全く手つかずであった。従ってまずはハミルトン流が単純な特異点を持つ場合にハミルトン流の軌道と偏微分方程式の種々の性質との関連を調べる必要があった。

2. 研究の目的

ハミルトン流の特異点のまわりでの線形化であるハミルトン写像のスペクトルと、特異点のまわりでのハミルトン流の軌道の時間大域的挙動が対応する二次特性的双曲型作用素の諸種の問題にどのような影響を与えるか、あるいはどのような対応関係があるのか、特に初期値問題の解の存在や、解の挙動、特異性の伝播等にどのような影響を及ぼすのかを明らかにすることを目的とした。

3. 研究の方法

初期値問題の適切性を示すために荷重つきエネルギー評価を求めるとを基本とした。このために複素数値相関数の Fourier 積分作用素の理論を整備した。更に荷重関数を探すために固有の時間変数を不変にする正準変換を用いてプワソン括弧式で測った距離を基準にした標準形を求めた。非適切性を示すには Fourier-Laplace 変換を通して常微分方程式の接続問題に帰着させることを基本とし、接続問題の Stokes 係数の零点を見つけることに努めた。これは単純変わり点や 2 重変わり点をもつ常微分方程式の WKB 解の接続問題を解くことと深く関係するので exact WKB 解析研究グループとも研究交流を行った。また海外共同研究者である E. Bernardi とはメールでの情報交換に加え、年一回研究代表者がイタリアを訪問し、また E. Bernardi を日本に招聘し共同研究を行った。

4. 研究成果

二次特性多様体に極限点をもつ零陪特性帯が存在するときには初期値問題が適切となる空間として Gevrey 5 クラスが自然に現れる。このことは零陪特性帯の幾何と初期値問題が適切でとなる Gevrey クラスの間に何らかの関係があることを示唆するのでそれを調べるために強双曲型に倣って強 Gevrey 双曲型の考え方を導入した。P を 2 階の微分作用素とするとき p が原点で強 Gevrey s 双曲型であるとは、原点の近傍で定義された任意の一階の微分作用素 Q に対して p+Q に対する初期値問題が s 以下の Gevrey クラスで適切となることとする。また p が強 Gevrey s 双曲型となる最大の s を p の強 Gevrey 双曲型指数と呼ぶことにする。ハミルトン写像の二乗の核と像の交わりが自明でない時、二次特

性多様体に接する零陪特性帯が存在する、という条件の下で p は強 Gevrey 3 双曲型であることを示した。さらに歪対称なポテンシャルをもつ Schrodinger 作用素の固有値問題に関する E. Caliceti や E. Derabaere の結果を利用して 3 次の多項式係数をもつ 2 階常微分方程式の接続問題の Stokes 係数の零点の存在範囲を評価し、この Gevrey 指数 3 が最良であることを示しこの p の強 Gevrey 双曲型指数が 3 であることを証明した。また二次特性多様体に接する零陪特性帯が存在しない場合には p は強 Gevrey 4 双曲型であることを示した。このときは 3 次の多項式係数をもつ 2 階常微分方程式の接続問題の Stokes 係数の零点の存在範囲について部分積分を適用する、という全く新しい方法でその範囲を評価することに成功しこの結果を利用して Gevrey 指数 4 が最良であることを証明しこの p に対する強 Gevrey 双曲型指数が 4 であることを証明した。以上の結果から二次特性多様体の余次元が 3 の場合に限れば、強 Gevrey 双曲型指数の閾値は 2, 3, 4 のみでありしかもこの閾値からハミルトン写像の構造と特性多様体の近傍での零陪特性帯の挙動が完全に決定される、という著しい結果が得られた。

これらの結果を含む非実効的双曲型作用素の初期値問題の適切性についてイタリアのピサ大学で大学院生向けの連続講義を行い、これを基にして日本数学会の MSJ memoirs としてモノグラフ「Cauchy Problem for Noneffectively Hyperbolic Operators」を出版した。日本数学会の 2013 年の年会では「二次特性点をもつ偏微分方程式の初期値問題」と題して企画特別講演を行った。

二次特性多様体の中の余次元 1 の部分多様体上でハミルトン写像のスペクトル構造が変化する非実効的双曲型作用素の初期値問題を研究しハミルトン写像のスペクトル構造がその上で変化する部分多様体に接する零陪特性帯が存在しない、という仮定の下で狭義 Ivrii-Petkov-Hormander 条件が満たされる場合に先験的エネルギー評価を導いた。これより初期値問題が適切であることを証明した。また 2 次特性多様体に接しながら近づく零陪特性帯で、ハミルトン写像のスペクトル構造がその上で変化する部分多様体には横断的であるものが存在するにもかかわらず、初期値問題が適切となるクラスが実際に存在することも示した。これはスペクトル構造が一定である場合からは予想もできない結果である。

また二次特性多様体の中の余次元 1 の部分多様体の外では実効的双曲型であり、二次特性多様体に接する零陪特性帯は存在しない二次特性的双曲型作用素の初期値問題の適切性を研究した。副主表象の虚部とハミルトン写像の実固有値の比が有界でありかつ狭

義 Ivrii-Petkov-Hormander 条件が遷移部分多様体上で成立しているとき荷重付きの超局所エネルギー評価式を導くことに成功した。これによって全ての指数の Gevrey クラスで初期値問題が適切となることが分かった。

二次特性的な非実効的双曲型作用素では主シンボルのハミルトン流の軌道で二次特性多様体に接するものが存在しないための必要十分条件は、ある関数のハミルトンベクトル場の 3 乗が主表象に作用したとき恒等的に零となることである。2011 年 11 月にイタリアの Bologna で E. Bernardi と共同で 2 次特性多様体が一般次元の場合にハミルトン写像のスペクトル構造が余次元 1 の部分多様体で変化する場合は零陪特性帯の挙動をハミルトンの正準方程式を直接調べる、という立場から研究した。この共同研究の過程から 2004 年に研究代表者が与えた上記の事実の証明を大幅に簡略化することに成功した。

二階の双曲型作用素を研究し、初期値問題の解の超局所台が有限速度で伝播することを保証するエネルギー評価式を提案した。次に非実効的双曲型作用素で二次特性多様体に接する零陪特性帯が存在しない場合を研究し、正跡が零のときに上記のエネルギー評価式を導くことにより初期値問題が適切となるためには Levi 条件の成立することが必要十分であることを証明した。この結果は 1970 年代の Hormander の結果の拡張でもある。

2011 年 4 月～6 月にはイタリアのピサを訪れ、F.Colombini, N.Oruu, L.pernazza と共同で 2 階 2 独立変数の双曲型作用素に対する初期値問題を研究し、従来の仮定よりずっと弱い仮定の下で初期値問題が適切となることを示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 7 件)

T.Nishitani, On the Cauchy problem for hyperbolic operators with double characteristics, a transition case, Fourier Analysis, Trends in Mathematics, 査読有, 2014, 311-334

T.Nishitani, On the Cauchy problem for non effectively hyperbolic operators, a transition case, Studies in Phase Space Analysis with Applications to PEDs, 査読有, vol 84, 2013, 259-290

S.Doi, T.Nishitani, H.Ueda, Note on lower bounds of energy growth for solutions to wave equations, Osaka J. Math. 査読有, Vol 49, 2012, 1065-1085

F.Colombini,T.Nishitani, N.Oruu,

L.Pernazza, Some well-posed Cauchy problem for second order hyperbolic equations, Osaka J. Math. 査読有, vol 48, 2011, 645-673

E.Bernardi, T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 3 well-posedness, J. Hyperbolic Differ. Equ, 査読有, vol 8, 2011, 615-650

E.Bernardi, T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, the Gevrey 4 well-posedness, Kyoto J. Math. 査読有, Vol 51, 2011, 767-810

T.Nishitani, A note on the zero free region of the Stokes multipliers for second order ordinary differential equations with cubic polynomial coefficients, Funkcialaj Ekvacioj, 査読有, vol 54, 2011, 473-483

[学会発表](計 6 件)

T.Nishitani, Local and microlocal Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, 9-th International ISSAC Congress, 2013/08/05~08/09 クラコフ, ポーランド

T.Nishitani, A remark on the local and microlocal Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, Linear and Nonlinear Hyperbolic Equations, 2013/07/01~07/04, ピサ, イタリア

西谷 達雄, 二次特性点を持つ偏微分方程式の初期値問題, 2013 年日本数学会企画特別講演, 2013/03/20~03/23, 京都大学

T.Nishitani, On the Cauchy Problem for noneffectively hyperbolic operators, a transition case, Fourier Analysis and Pseudo-Differential Operators, 2012/06/25~06/30, ヘルシンキ, フィンランド

T.Nishitani, The Gevrey well-posedness of the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, 2011 NCTS Taiwan-Japan Workshop on PDEs and Geometric Analysis, 2011/12/19, 台北, 台湾

T.Nishitani, On the Cauchy problem for noneffectively hyperbolic operators, a transition case, Perspectives in Phase Space Analysis on PDEs, 2011/09/29, Bertinoro, イタリア

[図書](計 2 件)

T.Nishitani, Hyperbolic Systems with Analytic Coefficients, Springer, 2014

T.Nishitani, Cauchy problem for
Noneffectively Hyperbolic Operators,
Mathematical Society of Japan, 2013

6. 研究組織

(1) 研究代表者

西谷 達雄 (NISHITANI TATSUO)
大阪大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号：80127117

(2) 研究分担者

()

研究者番号：

(3) 連携研究者

()

研究者番号：