様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２７ 年　 ６ 月 １１ 日現在

機関番号：１５１０１

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：２３５４０２０３

研究課題名（和文）表現論的不変量と運動量写像

研究課題名（英文）Representation-theoretic invariants and moment map

研究代表者

橋本　隆司（Hashimoto, Takashi）

鳥取大学・大学教育支援機構・教授

研究者番号：９０２６３４９１

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,600,000円

研究成果の概要（和文）：複素簡約線形リー群Gに付随するグラスマン多様体上の余接束の局所自明な積束をアフィン変換で貼合わせて構成される捩れ余接束が，捩れ運動量写像により複素余随伴軌道と同型となること，捩れ運動量写像は捩れ余接束上の運動量写像になることを明らかにした．またGの非コンパクト実型による余随伴軌道の（捩れ）余接束への埋込みを，捩れ運動量写像およびユニタリ表現の最高ウェイトベクトルを用いて構成した．さらに，シンプレクティックベクトル空間の運動量写像を正準量子化することにより，Weil表現が得られること，その随伴多様体が量子化の際に選んだラグランジュ部分空間の運動量写像による像に一致することを示した．

研究成果の概要（英文）：I showed that a twisted moment map provides a symplectic isomorphism from a twisted cotangent bundle on the Grassmann variety of complex reductive linear Lie groups G, which one constructs by patching locally trivial bundles using affine transformation that is induced from the twisted moment map, onto complex coadjoint G-orbit, and that the isomorphism, in fact, gives a moment map on the twisted cotangent bundle. I also construcred an embedding of coadjoint orbit under noncompact real forms G_0 of G into the (twisted) cotangent bundle in terms of the twisted moment map and the highest weight vector of unitary representation of G_0.
Moreover, I showed that the canonical quantization of the moment map on symplectic vector spaces gives us the oscillator (or Segal-Shale-Weil) representations and that the images of Lagrangian subspaces chosen in the quantization coincides with the associated varieties of the representations.

研究分野：表現論

キーワード：moment map　twisted cotangent bundle　symplectic isomorphism　coadjoint orbit　Weil representation　canonical quantization

１．研究開始当初の背景

(1)　IV型を除く既約な古典型非コンパクト型エルミート対称対を (G,K) と記し，G,K のリー環を$\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{k}_0$それらの複素化を $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$ で表す．$\mathfrak{g}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{p}$を複素カルタン分解とすると，随伴作用により $\mathfrak{k}$ が $\mathfrak{p}$ に作用するが，$\mathfrak{k}_0$ の中心が固有値 $i,-i$ で作用する $\mathfrak{p}$ の固有空間をそれぞれ $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{u}_-$で表す．$\mathfrak{k}$ を Lie 環にもつ連結な複素代数群を K_{C}, その有限次元既約表現を (λ, V_λ) とするとき，G の正則離散系列と呼ばれる既約ユニタリ表現が次のように実現される．すなわち，G の複素化を G_{C}，また，$\mathfrak{q}=\mathfrak{k}\oplus\mathfrak{u}_-$ に対応する G_{C} の極大放物型部分群を Q とし，Q の冪単根基 U_- を自明に作用させることにより V_λ を Q 加群とみなす．主束 $G_{\mathrm{C}}\to G_{\mathrm{C}}/Q$ に同伴する正則ベクトル束 $G_{\mathrm{C}}\times_Q V_\lambda$ の開埋め込み $G/K\subset G_{\mathrm{C}}/Q$ による引戻しを E_λ とする．G のハール測度に関し，2乗可積分な E_λ の正則切断全体のなすヒルベルト空間をH_λとし，G を H_λ の上に，$\pi_\lambda(g)f(z)=f(g^{-1}z)\ (g\in G, f\in \mathrm{H}_\lambda)$ で作用させれば，G の既約ユニタリ表現 $(\pi_\lambda, \mathrm{H}_\lambda)$ が得られる．このとき，ヒルベルト空間 H_λ は，$U=\exp\,\mathfrak{u}$ 内の或る開集合 Ω 上定義された V_λ に値を持つ正則函数のなす空間内に実現される．

(2)　V_λ は1次元表現であると仮定し，整数 s に対し，非コンパクト単純ルートに対応する基本ウェイトの s 倍 ($G=\mathrm{SU}(p,q), \mathrm{Sp}(n,\mathrm{R})$ のとき)，または $s/2$ 倍 ($G=\mathrm{SO}^*(2n)$ のとき) をλとする．$r=\mathrm{R}\text{-rank}\,G$ とおくとき，u 上の多項式係数微分作用素環 PD(u) の中，K_{C} の作用で不変な微分作用素のなす部分環 $\mathrm{PD(u)}^{K_C}$ は，行列式またはパフィアンを用いて記述される生成系 $\{\Gamma_k\}, k=1,2,\ldots,r,$ をもつことが知られており，これら不変微分作用素 $\{\Gamma_k\}$ はカペリ恒等式において本質的な役割を果たす．Γ_k の主表象を γ_k とかくとき，$\{\gamma_k\}$ の母函数が，次のようにして得られるということがわかった．すなわち，複素リー環 $\mathfrak{g}$ の基底 $\{X_i\}$ に対し，そのキリング形式に関する双対基底 を $\{X_i^\vee\}_i$ とする．

G の表現 π_λ から誘導される $\mathfrak{g}$ の微分表現も π_λ とかくとき，微分作用素 $\pi_\lambda(X)\ (X\in\mathfrak{g})$ とその表象 $\sigma_\lambda(X)$ に対し，

$$\boldsymbol{\sigma_\lambda(X)} = \textstyle\sum_i \sigma_\lambda(X_i^\vee) \otimes X_i \qquad (*)$$

とおく． 定義から明らかなように，これは基底 $\{X_i\}$のとり方によらない．さらに，新たにパラメータ τ を導入し，$\boldsymbol{\sigma_\lambda(X)}$ においてパラメータ s を部分的にシフトし，$s-\Gamma_1$ を τ で置き換えたものを $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\lambda(\boldsymbol{X})$ とおく．このとき，$\det(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\lambda(\boldsymbol{X}))$ または $\mathrm{Pf}\,(\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_\lambda(\boldsymbol{X}))$ が $\{\gamma_k\}$ の母函数を与える．

(3) グラスマン多様体 G_{C}/Q の正則余接束 $T^*(G_{\mathrm{C}}/Q)$上の運動量写像 $\mu: T^*(G_{\mathrm{C}}/Q)\to\mathfrak{g}^*$ とキリング形式による同型 $\mathfrak{g}^*\simeq\mathfrak{g}$ との合成写像も単に μ で表せば，$\boldsymbol{\sigma_\lambda(X)}$ の主表象部分(すなわち，一階の微分作用素の表象，換言すれば λ が自明な場合) は $T^*(G_{\mathrm{C}}/Q)$ 上の運動量写像に他ならず，全表象 $\boldsymbol{\sigma_\lambda(X)}$ 自身は捩れ運動量写像と呼ばれる写像に一致する．Schmid-Vilonenにより, 捩れ運動量写像，および余随伴軌道 $S=G\cdot\lambda$ の境界 ∂S の定義函数 f_λ を用いて，S に対応する $T^*(G_{\mathrm{C}}/Q)$ の特性サイクルを記述し，その上で同変体積を計算することにより，表現論において最も重要な不変量の一つである G のユニタリ表現 $(\pi_\lambda, \mathrm{H}_\lambda)$ の指標公式が求められている．

２．研究の目的

(1) 本研究では，次の3点に焦点を絞り研究を行う(以後，$\boldsymbol{\sigma_\lambda(X)}$ を μ_λ とかく):

① 捩れ運動量写像 μ_λ および余随伴軌道の境界 ∂S の定義函数を用いて特性サイクルを記述し，これにより余随伴軌道 S のフーリエ変換を計算する;

② 既に知られている随伴多様体, 随伴サイクル, Gelfand-Kirillov 次元や Bernstein 次数等の表現論的不変量を μ_λ を用いて記述する;

③ ②で得られた結果を基に, μ_λ を使い, 随伴サイクルが wave front cycle に一致するというBarbasch-Vogan予想 (Schmid-Vilonenによって肯定的に解決済) へのアプローチを試みる．さらに，$\det(\tilde{\sigma}_\lambda(\boldsymbol{X}))$ または $\mathrm{Pf}\,(\tilde{\sigma}_\lambda(\boldsymbol{X}))$と Chern 類や Euler 類など特性類との関係を明らかにする．

(2) ①, ②において余随伴軌道のフーリエ変換（すなわち G のユニタリ表現の指標）を求めるために捩れ運動量写像 μ_λ を用いる理由は，その構成法がリー理論的に自然であることによる．また Schmid-Vilonen は Barbasch-Vogan 予想を解く際，余随伴軌道の境界 ∂S の定義函数 f_λ を効果的に用いた. またベクトル束の Chern 類および Euler 類といった特性類が曲率形式の行列式およびパフィアンで表されることから，$\det(\tilde{\sigma}_\lambda(\boldsymbol{X}))$ または $\mathrm{Pf}\,(\tilde{\sigma}_\lambda(\boldsymbol{X}))$と既知の表現論的不変量との関係が明らかになれば，これら不変量に新たな幾何学的意味付けを与えることが可能になるものと期待される．

(3) 本研究の特色および独創性は，K_{C}-不変微分作用素を非コンパクト型エルミート対称空間上の微分作用素とみなし，リー理論的に自然な由来をもつ捩れ運動量写像 μ_λ を用いた余随伴軌道のフーリエ変換の計算，表現論的不変量の記述にある．また μ_λ の変形 $\tilde{\sigma}_\lambda(X)$ の行列式またはパフィアンにより不変微分作用素の主表象の母函数を実現したこと，および，$\sigma_\lambda(\boldsymbol{X})$ とその変形 $\tilde{\sigma}_\lambda(X)$ を通して表現論的不変量を幾何学的に捉えようとする点も特色の一つである．

３．研究の方法

(1) 以下，$G = \mathrm{SU}(1, 1)$，従って $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathrm{C})$ の場合を例に説明する. 研究の目的で述べた有界対称領域 $\Omega \simeq G/K$ は，この場合，複素平面内の単位円盤 D に他ならず，G のユニタリ表現 $(\pi_\lambda, \mathrm{H}_\lambda)$ は D 上の正則函数からなるヒルベルト空間上に実現される. $\partial/\partial z$ に ξ を代入して得られる微分作用素 $\pi_\lambda(X)$ $(X\in\mathfrak{g})$ 表象を $\sigma_\lambda(X)$ とし，同上の処方箋(*) に従い μ_λ $(=\sigma_\lambda(\boldsymbol{X}))$ を構成する．G/K 内の点 z に対し，λ が自明 $(s = 0)$ であるとき，U の元 u_z を適当にとれば, $\mathrm{Ad}(u_z^{-1})$ $\mu_\lambda(z, \xi)$ は $\mathfrak{u}_-$に値をとり，特に冪零になる．この場合，μ_λ が余接束上の運動量写像に他ならないということを考慮すれば，この事実は運動量写像の同変性から自然に従い，また正則離散系列 $(\pi_\lambda, \mathrm{H}_\lambda)$ に対応する $(\mathfrak{g}, K_{\mathrm{C}})$-加群の随伴多様体が $\mathfrak{u}_-$であることとも符号する．さて λ が自明でないとき，$U_- = \exp\ \mathfrak{u}_-$の元 u_w^-をうまくとれば,

$$\mathrm{Ad}(u_z^{-1})\ \mu_\lambda(z, \xi) = \mathrm{Ad}(u_w^-)\ \lambda^\vee,$$

従って，　$g = u_z\, u_w^-\, t$ とおけば,

$$\mu_\lambda(z, \xi) = \mathrm{Ad}(g)\ \lambda^\vee$$

となり, μ_λ は G_{C} のガウス分解と密接に関係している．ここで $\lambda^\vee$は，キリング形式による同一視 $\mathfrak{g}^* \simeq \mathfrak{g}$ により λ に対応する $\mathfrak{g}$ の元である．

(2) この μ_λ の G_{C} 同変性を効果的に利用し，また ∂S の定義函数 f_λ をリー理論的に自然な最高ウェイトベクトルを用いて構成し，余随伴 G 軌道 S を正則余接束に埋込むことにより，S のフーリエ変換を計算する. また②で述べたように, これを用いて随伴多様体, 随伴サイクル, Gelfand-Kirillov 次元や Bernstein 次数等の表現論的不変量を記述する. さらにこれらを基に，③で述べたように, Barbasch-Vogan 予想「随伴サイクル= wave front cycle」へのアプローチを試みる．また可能ならば，$\det(\tilde{\sigma}_\lambda(\boldsymbol{X}))$ または $\mathrm{Pf}\,(\tilde{\sigma}_\lambda(\boldsymbol{X}))$ と幾何学的特性類との関係を明らかにする．

４．研究成果

(1) 一般に複素簡約線形リー群 G_{C} とそのリー環 $\mathfrak{g}$ に対し, 半単純な $\lambda \in \mathfrak{g}^*$の固定部分群を Levi 部分群に持つ G_{C}の放物型部分群を Q とすれば，捩れ運動量写像μ_λはグラスマン多様体 G_{C}/Q の正則余接束の局所自明な積束上で余随伴軌道 $G_{\mathrm{C}}\cdot\lambda$ の中への正則な同型写像を与え，局所自明束をμ_λ の G_{C}同変性を

利用して，アフィン変換で貼合わせ構成される正則な捩れ余接束 $T^*(G_{\mathbb{C}}/Q)_\lambda$ は，μ_λにより $G_{\mathbb{C}}\cdot\lambda$ と同型になることを示した．さらに，μ_λは $T^*(G_{\mathbb{C}}/Q)_\lambda$ 上の運動量写像になることも示した．

(2) $G_{\mathbb{C}}$ の非コンパクトな実型 G に対し，λ を通る余随伴 G 軌道 S から正則な（捩れ）余接束への埋込みを，μ_λおよびλから構成される G のユニタリ表現の最高ウェイトベクトルを用いて構成した．これにより，簡単な場合に余随伴軌道のフーリエ変換が大学 1，2 年生程度の微積分で計算可能であることを示した．

(3) シンプレクティックベクトル空間の運動量写像を正準量子化することにより，oscillator (または Segal-Shale-Weil) 表現が得られることを示した．また，その随伴多様体が，正準量子化の際に選んだラグランジュ部分空間の運動量写像による像に一致することもわかった．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 6 件）

① T. Hashimoto, A twisted moment map and its equivariance, Tohoku Math. J., vol.66 no.4 (2014), pp.563-581 ［査読有］

② T. Hashimoto, On the principal symbols of $K_{\mathbb{C}}$-invariant differential operators on Hermitian symmetric spaces, J. Math. Soc. Japan, vol.63 no.3 (2011), pp.837-869 ［査読有］

③ 橋本隆司, Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation, RIMS Kokyuroku vol.1925 (2014) pp.103-116 ［査読無］

④ T. Hashimoto, Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation, International congress of mathematicians Seoul 2014 Abstracts (2014), p.197 ［査読無］

⑤ 橋本隆司, 捩れ運動量写像とその同変性, RIMS Kokyuroku vol.1825 (2013) pp.153-165 ［査読無］

⑥ 橋本隆司, Embedding of real coadjoint orbit in the twisted cotangent bundle of the complex flag variety, 日本数学会年会函数解析学分科会講演アブストラクト(2013), pp.23-24 ［査読無］

〔学会発表〕（計 8 件）

① 橋本隆司, シンプレクティックベクトル空間上の運動量写像と oscillator 表現，2014 年度表現論ワークショップ，2014 年 12 月 25 日，県民ふれあい会館（鳥取県鳥取市）

② Takashi Hashimoto, Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation, International Congress of Mathematicians Seoul 2014, August 16, 2014, Seoul (Korea)

③ 橋本隆司, Quantization of the moment map on symplectic vector space and the oscillator representation, 京都大学数理解析研究所研究集会「表現論と調和解析の新たな進展」，2014 年 6 月 26 日，京都大学（京都府京都市）

④ 橋本隆司，Quantization of the moment map on symplectic vector space and Howe duality，松木先生の還暦祝研究集会，2014 年 2 月 8 日，県民ふれあい会館（鳥取県鳥取市）

⑤ 橋本隆司, シンプレクティックベクトル空間の運動量写像と非可換調和振動子，2013 年度表現論ワークショップ，2013 年 9 月 13 日, 京都大学(京都府京都市)

⑥ 橋本隆司, Embedding of real coadjoint orbit in the twisted cotangent bundle of the complex flag variety,日本数学会 2013 年度年会函数解析学分科会，2013 年 3 月 21 日, 京都大学(京都府京都市)

⑦ 橋本隆司, 初等的計算による有界対称領域の同変体積，2012 年度表現論ワークショップ，2012 年 12 月 27 日，県民ふれあい会館（鳥取県鳥取市）

⑧ 橋本隆司, 捩れ運動量写像とその同変性, 京都大学数理解析研究所研究集会「表現論と非可換調和解析の展望」，2012 年 6 月 21 日，京都大学（京都府京都市）

〔図書〕（計　　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
　橋本　隆司（HASHIMOTO, Takashi）
　鳥取大学・大学教育支援機構・教授
　研究者番号：90263491