

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 5 月 13 日現在

機関番号：15301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540204

研究課題名(和文) 行列係数シュレディンガー作用素のスペクトル解析とその応用

研究課題名(英文) Spectral Analysis on the Schroedinger Operators with Matrix Coefficients and Its Applications

研究代表者

廣川 真男 (Hirokawa, Masao)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：70282788

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：量子ビットの制御問題と輸送問題の視点に立ち、行列係数のシュレディンガー作用素に対するスペクトル解析と作用素解析を行った。前者の問題に関しては、ラビ模型とその回転波近似で得られるジェインズ・カミングス模型と呼ばれる2準位(人工)原子と1モード光子が相互作用する数理モデルのスペクトル解析を行い、原子・光子間の相互作用の強さを決める結合定数を大きくして行く過程での数学的性質を調べた。後者の問題に関しては、電子のスピンで実現するスピントロニック量子ビットに対する、量子トンネリング位相因子の数学的性質を明らかにする研究を行った。

研究成果の概要(英文)：I had studied the Schroedinger operators with matrix coefficients in the light of the problems for controlling and transporting qubit. As for the former problem, I had made spectral analysis for the Rabi model and the Janes-Cummings model describing a 2-level (artificial) atom coupled with a 1-mode photon. I had investigated the mathematical properties on the energy as the coupling strength between the atom and the photon get larger. As for the latter problem, I had performed the research into the characterization of the quantum tunneling phase factor and the clarification of its mathematical properties.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：行列係数を持つシュレディンガー作用素 ラビ模型 超対称性 自発的超対称性の破れ ディラック作用素 自己共役拡張 境界条件 量子ビット

1. 研究開始当初の背景

量子情報や量子計算機を量子ネットワークというシステム論的観点から見たとき、量子ビットの制御、記憶、そして量子ビットの輸送という物理における基本的概念を調べ研究する必要がある。この量子ネットワークを形成する最も基本的なユニットとして、1つの接合と2本の量子細線から成るものを考える。接合部で量子ビットの制御や記憶を行い、量子細線を経由して量子ビットを輸送する物理系を考えるのである。これらのユニットを幾つも組み合わせることで量子ネットワークが形成される。量子ネットワークの例としては、量子情報集積回路等が考えられる。量子ビットを実現する物理系としては、

(人工)原子の2準位量子状態；

電子のスピン状態；

と言ったものが代表的なものであるが、この違いは、前者は共振器の中に固定され量子ビットを制御する上では便利であるが、輸送する場合には適さない。特に、回路量子電磁力学における人工原子は、ジョセフソン接合をLC共振回路に組み込み実現するので、ここで作り出される量子ビットをそのまま輸送することは不可能である。また、は電子を輸送することで量子ビットの輸送が可能となる。ただし、は光を用いた制御が可能となるが、は電子のスピンを制御する技術が必要となる。

本研究課題の背景は、基本ユニットによる量子ビットの制御機能と輸送機能にテーマを絞り、それぞれを別々に扱い、それぞれの数理解析を構築する数学を構築する最初の段階を研究することであった。特に、それぞれの機能を記述する数理解析の立場から、物理の基礎問題に光を当てるのが背景にあった。

2. 研究の目的

本研究課題では、

- 1) 量子ビットの制御を接合部分で行うため、量子ビットを2準位(人工)原子で表現し、それを1モード光子と共振器の中で相互作用させる物理系を記述する数理解析のスペクトル解析；
 - 2) 量子ビットの輸送を量子細線で行うため、量子ビットを電子のスピンで実現し、量子細線と接合の成す境界が電子と電子のスピンにどう影響するかを調べる；
- ことが目的の概略であった。

1) に関しては、最近の回路量子電磁力学の先端技術により、2準位人工原子と1モード・マイクロ波の光子との相互作用の強さを、弱結合領域、強結合領域、そしてさらに超結合領域を実現可能となった。弱結合領域と強結合領域は、共振器の中で本物の2準位原子と1モードレーザーの光子を相互作用させる共振器量子電磁力学でも可能で、この物理系を記述する数理解析モデルとして、ジェインズ・

カミングス模型が使われていて、この模型で実験をよく説明することができる。このジェインズ・カミングス模型のエネルギー・スペクトルには、2種類のエネルギー準位交差があることが数学として代表者の先行研究で明らかにされ、そのcavity-induced原子冷却の物理的アイディアにも応用されていた。ところが、回路量子電磁力学が超強結合領域を実現するようになると、ジェインズ・カミングス模型による理論結果と実験結果との間に食い違いが現れるようになり、超強結合領域ではラビ模型が有効であることが指摘されるようになった。ラビ模型とジェインズ・カミングス模型との関係は、ラビ模型に回転波近似を施すことでジェインズ・カミングス模型が得られるが、この回転波近似には結合の強さに理論的条件が要求される。すなわち、最近の先端技術はこの理論的条件を実際に観測で見せるようになった訳である。ラビ模型のエネルギー・スペクトルを数理解析すると、ジェインズ・カミングス模型のエネルギー・スペクトルのものとはかなり違いがあることが分かる。従って、数学的には、相互作用の強さを表す結合定数を大きくして行くと、回転波近似の限界条件に達し、ジェインズ・カミングス模型からラビ模型への何らかの相転移を示唆していると言え、この相転移の数学を解明することが、本研究課題も目的の一つであった。

2) に関しては、接合部分をブラック・ボックスとし数学的・物理的に任意性を持たせ、その接合の両端に量子細線を繋げた1次元の配位空間上を、スピン無しのシュレディンガー粒子が接合をトンネルしないときには、その波動関数の境界条件に位相因子が現れないのに対し、接合をトンネルするときに境界条件に位相因子が出現することが、代表者とその共同研究者によって発見されていた。本研究課題では、その位相因子が量子トンネル効果特有のものであることを数学として示し、トンネリングと位相因子との数学的関係を明らかにし、さらに、この関係がどのように電子のスピン、従ってスピントロニック量子ビットに影響を及ぼすかを調べ上げることがもう一つの目的であった。

3. 研究の方法

1) に関しては、非相対論的量子電磁力学、特に、スピン・ボゾン模型やウィグナー・ワイスコップ模型に対する代表者と共同研究者らが構築して来た数理解析の技術をシュレディンガー作用素の数学に自由度を落とし、ラビ模型やジェインズ・カミングス模型の解析に応用することで、スペクトル解析を行った。ただし、このとき、スピン・ボゾン模型やウィグナー・ワイスコップ模型の光の量子場のモードは非可算無限であったものが、ラビ模型やジェインズ・カミングス模型の光の量子場では1モードとなるので、スピン・ボゾン模型やウィグナー・ワイスコップ

模型では連続スペクトルとして表れていたものが、ラビ模型やジェインズ・カミングス模型では離散スペクトルとなるので、本研究課題特有の固有値問題を解決する数学手法を考える必要があった。

2)に関しては、物理的にはスピン有りのシュレディンガー作用素に対する解析が必要であるが、本研究課題で採用した方針は、最初にスピン無しのシュレディンガー作用素に対して、続いて、ディラック作用素に対して研究を行い、最後にスピン有りのシュレディンガー作用素に対する研究を行う方針をたてた。数学的手法は、物理的観測量を表す自己共役拡張と、その定義域を構成する波動関数の量子細線と接合部分での境界条件との対応関係を明らかにし、これらの対応を通して、電子と電子のスピン輸送問題を解析する方法を取った。具体的には、全ての自己共役拡張とその定義域を不足指数の概念を使い表現するフォン・ノイマンの理論をベースに、その定義域を構成する波動関数の作る境界条件のクラス分けと特徴付けを行うことになった。本研究で扱った数理モデルでは、不足指数が(2,2)となるので、定義域は $U(2)$ でパラメタ化される。この $U(2)$ に対して、接合に対して、反射とトンネルの表現を与えてやり、この表現を用いて、フォン・ノイマンの理論における $U(2)$ のパラメタ化と波動関数の境界条件の1対1対応を具体的に表現し、この表現の下で具体的な計算により目的を達成する手法を取った。

4. 研究成果

1)量子ビットを光で制御する観点から、量子ビットを実現する2準位原子のエネルギーを記述する 2×2 スピン行列を係数とし、1モード光子のエネルギーを記述する調和振動子のポテンシャルを持ったシュレディンガー作用素のエネルギー・スペクトルに対する数学的研究、さらに、2)制御された量子ビットを輸送する観点から、1つの接合と2本の量子細線から成る1次元配位空間上の量子ビットの輸送問題をシュレディンガー作用素とディラック作用素の自己共役性とその波動関数の境界条件との数学的関係を調べた。後者は本来、対象とする配位空間内での電子の動きは非相対論的であるので、スピンを持ったシュレディンガー作用素を考察するべきであったが、本研究では、まず、スピン無しシュレディンガー作用素、次に、ディラック作用素という順で研究が進み、スピン有リシュレディンガー作用素に関しては次の研究段階へと持越しになってしまった。

1)に関しては、ラビ模型において、基底エネルギー曲線と他の励起エネルギー曲線との間にはエネルギー交差が起こらないことが分かった。また、数値計算から、励起エネルギー曲線に関してはエネルギー交差が生じる事が予想され、この現象を超対称性量子

力学の観点から調べた：原子と光子の振動数を調整すると、結合の強さが無いときラビ模型は超対称性を示すが、結合の強さを大きくして行くと、漸近的に超対称性の自発的破れが生じ、これを引き起こすのがカイラル性である事が証明され、この過程の中でエネルギー交差が引き起こされる事が分かった。

2)に関しては、1つの接合と2本の量子細線から成る1次元配位空間上のスピン無しシュレディンガー作用素とディラック作用素の自己共役拡張とそれらの定義域を構成する波動関数が持つ境界条件の特徴付けを行った。この結果により、接合をトンネルするとき生じるトンネル効果特有の位相因子の数学的出現機構を完全に把握し、さらに、その位相因子と量子ビットを実現する電子のスピンとの関係を解明した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計3件)

M. Hirokawa, T. Kosaka,
A mathematical aspect of a tunnel-junction for spintronic qubit,
Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. **417**, No.2, 2014, 856-872.
DOI: 10.1016/j.jmaa.2014.03.061

M. Hirokawa, T. Kosaka,
One-Dimensional Tunnel-Junction
Formula for the Schrödinger Particle,
SIAM Journal on Applied Mathematics Vol. **73**,
No. 6, 2013, 2247-2261.
DOI: 10.1137/130929072

Y. Shikano, M. Hirokawa,
Boundary Conditions in One-dimensional
Tunneling Junction,
Journal of Physics: Conference Series
Vol. **302**, No.1, 2011, 012044, 4pages.
DOI: 10.1088/1742-6596/302/1/012044

[学会発表](計5件)

M. Hirokawa,
Tunnel-Junction Formulae with Application
to Spintronic Qubit,
Semiconductor Seminar, 2013年9月2日,
Weierstrass Institute for Applied
Analysis and Stochastics,
Berlin, Germany.

廣川真男,
(人工)原子と光の相互作用の数理から量子
デバイスへ,
計算材料科学と数学の協働によるスマート
材料デザイン手法の探索 階層構造を解
析する, 2013年3月15日, 東北大学
WPI-AIMR 本館.

M. Hirokawa,
On the coupling-strength increase of the
Rabi model in the light of SUSYQM

---from supersymmetric ground state to spontaneous supersymmetry breaking---, Workshop on "Spectral analysis of non-commutative harmonic oscillators and quantum devices", 2012 年 11 月 27 日, 九州大学大学院数理学研究院・IMI 棟.

M. Hirokawa,

Transition between the regimes of strong and ultra-strong couplings in circuit QED, Workshop on "Avoided ? Crossing of Eigenvalue Curves" ---Non-commutative Harmonic Oscillator, Special Functions and Number Theory---, 2012 年 3 月 7 日, 九州大学稲盛財団記念館.

M. Hirokawa,

Some mathematical problems on Modeling in circuit quantum electrodynamics, Berliner Oberseminar Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen, 2011 年 9 月 7 日, Weierstrass Institute for Applied Analysis and Stochastics, Berlin, Germany.

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕

出願状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

出願年月日 :

国内外の別 :

取得状況 (計 0 件)

名称 :

発明者 :

権利者 :

種類 :

番号 :

取得年月日 :

国内外の別 :

〔その他〕

ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

廣川 真男 (HIROKAWA Masao)

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号 : 70282788

(2) 研究分担者

()

研究者番号 :

(3) 連携研究者

()

研究者番号 :