

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540205

研究課題名(和文) 確率最適輸送問題とその応用

研究課題名(英文) stochastic optimal transportation problem and its application

研究代表者

三上 敏夫(mikami, toshio)

広島大学・工学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：70229657

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 4,000,000円、(間接経費) 1,200,000円

研究成果の概要(和文)：Knothe-Rosenblatt Rearrangementの一般化の確率過程版(Knothe-Rosenblatt Process (以下、KRP))とその応用の研究について、それに対する双対定理を証明し、KRPを双対定理及び特異摂動により特徴づけた。確率最適輸送問題の値関数の有限性を双対定理を通して、初期分布と終期分布の対数の微分の可積分性で特徴づけた。これにより、確率最適輸送問題の双対定理と値関数の有限性を示すことにより、2点確率境界値問題の解の存在を示すと言う、新しい方法が出来た。

研究成果の概要(英文)：On the study of stochastic process analogue of a generalization of the Knothe-Rosenblatt Rearrangement and its application, we proved the duality theorem and the characterization by the duality theorem and by the singular perturbation. We characterized the finiteness of the value function of the stochastic optimal transportation problem, via the duality theorem, by the integrability condition of derivatives of logarithms of initial and terminal distributions. This gives a new approach for the existence of a solution to two end points stochastic boundary value problem by the duality theorem for the stochastic optimal transportation problem and the finiteness of value function.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：確率最適輸送問題 双対定理 確率2点境界値問題

1. 研究開始当初の背景

有限次元の確率測度の Knothe-Rosenblatt rearrangement (KRR) は、その確率測度の分布関数により具体的に構成できる非減少な三角写像であり、Brunn-Minkowski 不等式の証明に役立ち、等周不等式に应用されている。無限次元の確率測度の KRR は、有限次元の KRR から帰納的に定義できる非減少な無限次元三角写像であり、対数ソボレフ不等式に应用されている。また、KRR は、Knothe-Rosenblatt process (KRP) のゼロ雑音極限になっている。

KRR の一般化や確率論への応用を考えるとともに、KRR の確率過程版である KRP の研究を通して、この方面の研究に**新たな光**を当てる。特に、これにより、調和経路過程一般化の研究が**新たに**始まる。

2. 研究の目的

(1) KRR の一般化に対して双対定理を証明し、KRR の一般化を双対定理や特異摂動により特徴づける。

KRR の一般化を対数ソボレフ不等式や等周不等式の一般化に应用する。

KRR の一般化の生存関数解析への応用として、最大従属確率変数の特徴づけを与える。

(2) 多次元の最適輸送問題の解による多次元マルコフ過程の離散近似の研究多次元最適輸送問題の解により、多次元ジャンプ型マルコフ過程のオイラー型近似法を与え、その近似列に対する汎関数極限定理を与える。

(3) KRP を無限次元の場合も含めて定義し、それに対する双対定理を証明し、KRP を双対定理、特異摂動及び大偏差定理により特徴づける。

KRP を対数ソボレフ不等式や等周不等式の一般化に应用する。

KRP を決定する汎関数方程式を導出し、その

解の存在と一意性を示す。

3. 研究の方法

(1) 確率論、統計学、偏微分方程式の文献を整備した。

電子メールによる日頃の研究連絡及び研究情報の収集のために、パソコンとその周辺機器、ソフトウェアを整備した。

(2) 各分担者とは、日頃は電子メールで研究連絡を実施した。

(3) 台湾中央大学に海外研究協力者を訪れ、最適輸送問題について1週間の集中講義をするとともに、確率最適輸送問題の確率量子化への応用と確率最適制御理論との関連性について、学生も交えて議論した。

この海外研究協力者は、数理ファイナンスに精通している本研究分担者を大阪大学に訪れ、そこでも、活発な議論をした。

(4) 海外研究協力者を米国Kansas大学から招聘し、空間次元が有限次元の時間無限大での最適輸送問題の研究に精通している広島大学の本研究分担者と3人で、無限次元の場合への拡張、特に、時間無限大での最適輸送問題の研究について議論を深め、問題点を洗い出した。

この海外研究協力者は、本研究分担者を大阪大学に訪れ、この問題について確率最適制御理論の立場から議論した。

(5) 研究分担者の市原准教授をアメリカのブラウン大学のFleming教授を訪問し、情報収集をした。

(6) 集中的な研究連絡、情報交換のために、以下の研究会を行った。

・ Probability and PDE 2012, January

10-12,2012 (広島大学)

・ The sixteenth Hi roshima Applied Analysis Seminar, Aug.30-31,2011 (広島大学)

4 . 研究成果

(1)台湾中央大学の海外研究協力者より、本研究代表者の最近の研究成果である最適輸送問題の双対定理が、フランスのTouzi教授等の研究によって数理ファイナンスの具体的な問題の解決につながっていることを教示され、この方面への更なる応用も意識した本研究課題の発展について、今後も共同研究することになった .

(2)確率最適輸送問題の値関数になっている無限次元のHamilton Jacobi方程式の解をMother理論のアイデアを無限次元空間上の変分問題に拡張した .

確率最適輸送問題を少し広いクラスの確率測度に関する変分問題と考えることにより、無限次元のHamilton Jacobi方程式の解の長時間漸近挙動を解析した .

今後の課題は、無限次元の弱KAM理論の構築である .

(3)最適輸送問題に出てくる2次Wasserstein 距離で決まるような関数のあるクラスを試験関数として取ることにより、無限次元の粘性解理論を通して、繰り込みのアイデアによるKPZ方程式の解の新しい定義を与えた . 存在と一意性については、共分散汎関数が十分な滑らかさを持っている場合に示すことができた .

今後の課題は、共分散汎関数の滑らかさが無い場合にこの結果を拡張することである .

(4)確率最適輸送問題の値関数の有限性を双対定理を通して、初期分布と終期分布の対数の微分の可積分性で特徴づけた . 証明のアイデアは、次の通りである : 初期分布と終期分

布の直積測度空間上に、初期値と終期値を線形に結んで出来る絶対連続な確率過程を考える . これの時刻 t での値を確率最適輸送問題の双対定理に現れるHamilton-Jacobi-Bellman 方程式の古典解の空間変数に代入し、その時間微分の解に依存しない可積分性を示すことである . これにより、確率最適輸送問題の双対定理と値関数の有限性をHamilton-Jacobi-Bellman 方程式の古典解の可積分性により示すことにより、2点確率境界値問題の解の存在を示すと言う、新しい方法が出来た . これは、一般化された確率最適輸送問題に対しても適応可能であり、従来Schrodinger汎関数方程式を解くと言う手法より、応用が広く、今後の発展が期待できる . また、この結果は2点確率境界値問題の解の空間が十分大きい事も示している . 今後、この手法をHamilton-Jacobi-Bellman 方程式の粘性解の枠組みに拡張する事が課題である .

5 . 主な発表論文等

[雑誌論文](計 3件)

1. T. Mikami, Stochastic optimal transportation problem and related topics. Progress in Variational Problems : Variational Problems Interacting with Probability Theories (Kyoto, 2012). Surikaiseki-kenkyusho Kokyuroku, No. 1837, 査読無, 2013, pp 74--86
2. T. Mikami, A characterization of the Knothe-Rosenblatt processes by a convergence result, SIAM J. CONT. OPTIM. 50 (4), 査読有, 2012 pp 1903-1920
3. I. Higuchi and T. Mikami, Maxima and minima of overall survival functions with fixed marginal distributions and transmission of technology, Communications in Statistics-Theory and Methods-. 41, Issue

1, 査読有, 2012, pp 46-61

[学会発表](計 3件)

1. T. Mikami, Stochastic optimal transportation and related topics, **変分問題の展開 - 確率論と交錯する変分問題**,

RIMS, Kyoto Univ., June 11-13, 2012

2. T. Mikami, Stochastic optimal transportation and marginal problem for stochastic processes. Dynamical Optimization in PDE and Geometry: Applications to Hamilton-Jacobi, Ergodic Optimization, Weak KAM. Universite Bordeaux 1, France, December 12- 21, 2011

3. T. Mikami, Stochastic optimal transportation and marginal problem for stochastic processes. Probability and Geometry, Kumamoto Univ., Sept. 15-17, 2011

6 . 研究組織

(1)研究代表者

三上 敏夫 (Mikami Toshio)
広島大学・大学院工学研究院・教授
研究者番号： 70229657

(2)研究分担者

市原 直幸 (Ichihara Naoyuki)
広島大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号： 70452563

貝瀬 秀裕 (Kaise Hidehiro)
大阪大学・大学院基礎工学研究科・准教授
研究者番号： 60377778

(4)連携研究者

樋口 勇夫 (Higuchi Isao)
大分工業高等専門学校・一般科理系・准教授
研究者番号： 20325153