

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540206

研究課題名(和文)非線形境界条件を持つ放物型方程式の適切性の研究

研究課題名(英文)Studies on well-posedness for parabolic equations with nonlinear constraints

研究代表者

松本 敏隆 (MATSUMOTO, TOSHITAKA)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・助教

研究者番号：20229561

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円、(間接経費) 1,140,000円

研究成果の概要(和文)：放物型方程式の適切性の研究をリブシッツ作用素半群の生成定理の研究と関連付けて行った。強連続解析的半群の非線形摂動理論を増大度の解析的半群の場合に拡張し、この結果の応用として半導体モデルに関連した移流拡散方程式の適切性を示した。また、強退化放物型方程式、結晶粒界現象のモデル方程式の弱解の存在・一意性を示した。従来の準縮小半群に対する近似定理をリブシッツ作用素半群の場合に拡張し、2次元ナビエ-ストークス方程式の解法に応用した。さらに、リブシッツ発展作用素の特徴付け定理についても研究を行った。

研究成果の概要(英文)：We studied well-posedness for parabolic equations and generation theorems of semigroups of Lipschitz operators. A nonlinear perturbation theory for analytic semigroups was extended to the case of analytic semigroups of growth order  $\alpha$ . The obtained results were applied to showing the well-posedness of 2-D drift-diffusion equations with no-flux boundary conditions. Existence and uniqueness results for weak solutions to strongly degenerate parabolic equations and a phase field model of grain boundary motion were also derived. Furthermore, we provided an approximation theorem for semigroups of Lipschitz operators and its application to 2-D Navier-Stokes equations as well as a characterization theorem for Lipschitz evolution operators in Banach spaces.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：適切性 放物型方程式 リブシッツ作用素半群

### 1. 研究開始当初の背景

非線形境界条件を伴った放物型方程式の初期値・境界値問題に対しては、Amann による補間空間を用いる方法が従来用いられてきた。一方、人口問題、細胞増殖モデルの適切性などに有効に用いられて来た Greiner や Thieme の方法では、初期値・境界値問題を積空間における半線形発展方程式の初期値問題として書き換えるため、半線形方程式のアプローチが適用できるというメリットがある。しかしながら、放物型方程式に対しては  $t=0$  で特異性を持つ解析的半群が現れるためか、この方法はあまり研究されていないように思われた。非線形境界条件を伴った放物型方程式に適用できれば、半線形方程式のアプローチから適切性や解の正則性に関して新たな知見が得られることが期待された。そこで、非線形制約条件(境界条件)を伴った放物型方程式の適切性を調べることを計画した。さらに、他の制約条件付き放物型方程式の適切性の研究を行うと共にリプシッツ作用素半群の生成理論の研究を行い、適切性の研究のツールとして整備することを考えた。

### 2. 研究の目的

(1) 増大度 の解析的半群に対する非線形摂動の研究

Biler 達による有界領域における no-flux 条件を伴った drift-diffusion 方程式の適切性の研究では、境界条件の非線形性の影響もあって全空間の場合に比べると適切性の結果は十分ではなかった。初期値・境界値問題はトレースの空間とベースとなる空間との積空間における半線形発展方程式の初期値問題として表せることを利用して、増大度 の解析的半群の非線形摂動問題の研究を行うことで、no-flux 条件を伴った drift-diffusion 方程式の適切性を調べることを目的とした。本研究で対象としている摂動問題は、研究代表者達が従来行ってきたリプシッツ作用素半群の生成定理の仮定を満たさないため、以前の結果を拡張することも計画した。

(2) 非線形境界条件を伴った非圧縮粘性流体の方程式の適切性の研究

摩擦を考慮した非線形境界条件を伴った非圧縮 Navier-Stokes 方程式に対しては、Hilbert 空間における極大単調作用素の理論を用いて、強解を与える非線形半群が Fujita により構成されている。こうした非線形境界条件を伴った非圧縮流体の方程式は、 $L^2$  ベースの空間で扱われているように思われる。本研究では、 $L^p$  ベースの空間での適切性並びに、他の非線形境界条件の下での適切性を調べることを目的とした。

(3) 非線形性の強い境界条件を持つ放物型方程式に応じるリプシッツ作用素半群の生成理論の研究

境界条件の非線形性が強い場合は、もはや半線形方程式として扱うことはできず、従って(1)で述べた方法は使えない。本研究では、非線形性の強い場合の適切性を解明するためのツールとなるように、リプシッツ作用素半群の生成理論を拡充することを目指した。

### 3. 研究の方法

(1) 増大度 の解析的半群の非線形摂動の研究においては、ノルムの代わりに「距離汎関数」を用いて差分近似解の収束の議論を行った。no-flux 条件を伴った drift-diffusion 方程式をモデル方程式として、研究代表者達が従来用いてきた「距離汎関数」、安定性条件、接線条件の拡張を考えた。差分近似解の収束、解の一意性および解の増大度を証明するために、Volterra 型積分方程式に対する比較定理を用いた。従来知られていた積分方程式に対する比較定理は比較関数に特異性がない場合であり、今回の問題には適用できないため、新たに比較関数に特異性がある場合の比較定理を準備した。

(2) 強退化放物型方程式の弱解の存在の研究において、1次元問題に関しては、従来用いられていた compensated compactness の代わりに H-測度を用いた。さらに、H-測度を用いたコンパクト性定理を移流項が不連続な場合の no-flux 条件付き 1次元強退化放物型方程式の弱解の存在に適用した。多次元問題に関しては、BV 空間内でエントロピー解を構成し、一意性を証明するために、Volpert-Hudjaevによる古典的な解の構成法と Kruzkov の doubling variable method を適用した。

(3) 結晶粒界現象を記述する数学モデルに対する 1次元問題の近似解の収束に対して、有界変動関数の理論や測度論を適用した。また、弱解の存在および性質を調べるために、ヒルベルト空間上の適正下半連続凸関数に関するモスコ収束の議論を用いた。

### 4. 研究成果

(1) 研究代表者と連携研究者は論文[6]において、増大度 の解析的半群の非線形摂動の研究を行い、従来に比べかなり一般的な条件の下で積分方程式を満たす解が一意存在することを証明した。近似解の収束、解の一意性の証明に対しては、従来常微分方程式に対する比較定理が用いられていたが、本研究の特色でもある Volterra 型積分方程式に対する比較定理を用いることで、以前は扱えなかった場合もカバーできるようになり、証明の手法としても意義ある物と思われる。得られた抽象的な結果の応用として、2次元 no-flux 条件付き drift-diffusion 方程式の適切性を  $L^p$  空間において証明し、解の時間正則性についても調べた。適切性の結果は、Biler 達による先行研究の結果の改良となる

ものであり、解の時間正則性の結果は従来得られていなかったものである。これらの結果は、非線形境界条件付きの半線形放物型方程式の初期値・境界値問題を積空間における半線形初期値問題に書き換えるという手法により得られたものであり、この手法が他の非線形境界条件付きの放物型方程式の研究においても役立つものと期待している。

(2) 分担者の渡邊は論文[1,3,5]において、双曲型保存則方程式と多孔性媒質方程式の一次結合の形をしている強退化放物型方程式の研究を行った。1次元 zero-flux 境界値問題では、特に非線形移流項が空間変数に関して不連続な場合を考察した。このケースでは、近似解の変動量が一樣に有界にならないため、従来の証明法は適用できない。本研究では弱収束法の一つである H-測度を用いたコンパクト性定理を近似解の有界列に適用することで弱解の存在を証明した。また、1次元初期値問題および1次元 zero-flux 境界値問題において、粘性消滅法を用いて構成された近似解の強収束性を利用してエントロピー解の存在を証明した。さらに、非線形移流項に対する増大条件の下で、構成したエントロピー解の一意性を証明した。多次元 zero-flux 境界値問題では、方程式の係数が滑らかな場合を考察し、BV 空間内でエントロピー解を構成し、その一意性を証明した。これらの研究で用いた方法は、zero-flux 境界条件以外の非線形境界条件の場合の研究にも適用できるものと期待される。

次に、論文[12]において不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対する1次元初期値問題を考察し、弱解の存在を証明した。従来の証明では compensated compactness method が用いられているが、この手法は強力である反面、流速には高い正則性を要求し、3次元以上の問題に適用するのは難しいという欠点もあった。本研究では、H-測度を用いた証明を採用することにより既存の結果よりも弱い仮定の下で弱解の存在を証明した。この手法は、3次元以上の問題へも適用できる可能性がある新しいものであり、高次元問題の研究の進展に役立つものと思われる。

(3) 分担者の渡邊は共同研究者と共に論文[2,4,8]において、結晶粒界現象を記述する Kobayashi-Warren-Carter モデルに対する1次元問題を考察した。このモデルは、導関数を含む重み付き全変動汎関数を含む自由エネルギーの勾配流として記述される二つの放物型方程式の系であり、厳密な数学的取扱いは非常に難しい。まず、自由エネルギーの定義域の閉包から初期関数を取った場合にエネルギー消散性を持つ弱解の存在を、Hilbert 空間上の適性下半連続凸関数に関する Mosco 収束性を用いて証明した。さらに、結晶面の鋭い界面の再現を考慮して、連立系の第二方程式である重み付き特異拡散方程

式の時間に関する係数が退化する場合を考察した。係数の退化領域と非退化領域に分け、解の滑らかさに注意しながら Mosco 収束を用いることで、エネルギー消散性を持つ弱解の存在を示し、その時間大域的挙動も調べた。これらの研究は、結晶粒界という応用上も興味深い現象を記述するモデル方程式に対する厳密な数学的取扱いに取り組むもので、モデル方程式に対する数学的な基礎付けを与える点で重要である。証明には、有界変動関数や適性下半連続凸関数に関する理論を駆使しており、他のモデル方程式を扱う際の手法の開発という点でも重要なもので、今後2次元以上の場合への進展が期待される。

(4) 分担者の小林と連携研究者は論文[7]において、リプシッツ作用素半群の近似理論に関して、非線形生成作用素が連続な場合に積公式を与えた。これは、抽象コーシー問題と密接に関連するものであると共に、数値計算の信頼性にも関連するもので応用上も重要である。得られた結果を射影法を用いた2次元ナビエ-ストークス方程式の解法に応用した。流体方程式に対する新しいアプローチを提案しており、今後この手法の進展により流体方程式への貢献が期待される。

(5) 分担者の小林と連携研究者は発表[5,9,12,15,16,22]において、リプシッツ発展作用素の生成作用素が連続な場合に特徴付け定理の研究を行い、得られた抽象的な結果を消散型準線形波動方程式の初期値問題の適切性の証明に応用した。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 12件)

1. H. Watanabe, Solvability of boundary value problems for strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* (査読有) 7, 2014, 177—189.  
DOI:10.3934/dcdss.2014.7.177
2. K. Shirakawa and H. Watanabe, Energy-dissipative solution to a one-dimensional phase field model of grain boundary motion, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* (査読有) 7, 2014, 139—159.  
DOI:10.3934/dcdss.2014.7.139
3. H. Watanabe, Entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with zero-flux boundary conditions, *Adv. Math. Sci. Appl.* (査読有) 23, 2013, 209—234.
4. H. Watanabe and K. Shirakawa, Qualitative properties of a

- one-dimensional phase-field system associated with grain boundary, GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl. (査読有) 36, 2013, 301—328.
5. H. Watanabe, Existence and uniqueness of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, Dynamical Systems, Differential Equations, DCDS Supplement 2013, Proceedings of the 9<sup>th</sup> AIMS Conference, Orland Florida, USA (査読有) 2013, 781—790.  
<http://www.aims.org/journals/pdfs.jsp?paperID=9260&mode=full>
  6. Y. Kobayashi and N. Tanaka, Approximation of semigroups of Lipschitz operators, J. Math. Anal. Appl. (査読有) 397, 2013, 529—536.  
DOI:10.1016/j.jmaa.2012.07.069
  7. T. Matsumoto and N. Tanaka, Nonlinear perturbation of a class of holomorphic semigroups of growth order by comparison theorems for Volterra equations, Nonlinear Anal. TMA (査読有) 84, 2013, 146—175.  
DOI:10.1016/j.na.2013.02.016
  8. K. Shirakawa, H. Watanabe and N. Yamazaki, Solvability for one-dimensional phase field system associated with grain boundary motion, Math. Ann. (査読有) 356, 2013, 301-330.  
DOI : 10.1007/s00208-012-0849-2
  9. 渡邊 紘, 不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対する初期値境界値問題、京都大学数理解析研究所講究録(査読無) 2012, 1810, 153—168.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1810-08.pdf>
  10. 白川健、渡邊 紘、山崎教昭、結晶粒界現象に関連する1次元フェーズ・フィールドモデル、京都大学数理解析研究所講究録 (査読無) 1779, 2012, 27—51.  
<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1779-04.pdf>
  11. K. Shirakawa, H. Watanabe and N. Yamazaki, Solvability for one-dimensional phase field system associated with grain boundary motion, Technical Reports of Mathematical Sciences, Chiba University (査読無) 27, 2011, 1—29.  
<http://www.math.s.chiba-u.ac.jp/report/files/11001.pdf>
  12. 渡邊 紘, 不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対する初期値問題について、サレジオ工業高等専門学校紀要 (査読無) 38, 2011, 13—20.  
<http://ci.nii.ac.jp/naid/110008803256>
- [学会発表](計 25件)
1. 渡邊 紘、空間変数に依存する拡散項を持つ強退化放物型方程式、日本数学会、2014年3月18日、学習院大学(東京都)
  2. 白川健、渡邊 紘、山崎教昭、結晶粒界現象に対する凝固による界面拡散を考慮した数学モデル、日本数学会、2014年3月18日、学習院大学(東京都)
  3. 渡邊 紘、白川健、退化性を伴う1次元 Kobayashi-Warren-Carter モデルに対する定性的性質、第39回発展方程式研究会、2013年12月23日、日本女子大学(東京都)
  4. 渡邊 紘、白川健、結晶粒界現象を記述する退化性を伴う1次元数学モデルに対する定性的性質、日本数学会、2013年9月25日、愛媛大学(愛媛県)
  5. 小林良和、バナッハ空間における非線形発展作用素と常微分方程式、日本数学会企画特別講演、2013年9月24日、愛媛大学(愛媛県)
  6. 白川健、渡邊 紘、S. Moll, 結晶粒界現象の放物型フェーズ・フィールドモデルにおける平滑化効果とエネルギー消散性、日本数学会、2013年9月25日、愛媛大学(愛媛県)
  7. H. Watanabe, Energy-dissipations in multidimensional Kobayashi-Warren-Carter models of grain boundaries, Equadiff 13, 2013年8月26日~2013年8月30日、Charles University in Prague (チェコ)
  8. 渡邊 紘、強退化放物型方程式に対する動力学的接近、日本数学会、2013年3月20日~2013年3月23日、京都大学(京都府)
  9. 富澤佑季乃、小林良和、田中直樹、Banach空間上のLipschitz発展作用素、日本数学会、2013年3月20日~2013年3月23日、京都大学(京都府)
  10. 渡邊 紘、強退化放物型方程式の初期値境界値問題に対する解の一意存在性、第5回東北楕円放物型微分方程式研究集会、2013年1月25日~2013年1月26日、東北大学(宮城県)
  11. 渡邊 紘、強退化放物型方程式に対する動力学的近似を用いたエントロピー解の構成、第38回発展方程式研究会、2012年12月22日~2012年12月24日、日本女子大学(東京都)
  12. Y. Tomizawa, Y. Kobayashi and N. Tanaka, Nonautonomous differential equations and Lipschitz evolution operators in Banach spaces, International Conference on the Theory, Methods and Applications of Nonlinear Equations, 2012年12月17

- 日～2012年12月21日、Texas A&M University (アメリカ)
13. H. Watanabe, Entropy solutions for strongly degenerate parabolic equations, 5<sup>th</sup> Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences -Modelings, Theory and Simulations, 2012年11月5日～2012年11月9日、関西セミナーハウス (京都)
  14. 渡邊 紘、不連続な係数を持つ強退化放物型方程式の初期値問題に対するエントロピー解、日本数学会、2012年9月18日～2012年9月21日、九州大学(福岡県)
  15. 富澤佑季乃、小林良和、田中直樹、Unique solutions to nonautonomous differential equation in Banach spaces, 日本数学会、2012年9月18日～2012年9月21日、九州大学(福岡県)
  16. Y. Kobayashi, Nonautonomous differential equations in Banach spaces with an application, The 4<sup>th</sup> international Symposium on Banach and Function Spaces 2012, 2012年9月12日～2012年9月15日、九州工業大学 (福岡県)
  17. H. Watanabe, Strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, Work Shop of JSPS-CNR Joint Research Project, 2012年8月3日、神戸大学 (兵庫県)
  18. H. Watanabe, Continuous dependence of entropy solutions to strongly degenerate parabolic equations with discontinuous coefficients, The 9<sup>th</sup> AIMS Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2012年7月1日～2012年7月5日、Orlando, Florida (アメリカ)
  19. 松本敏隆、田中直樹、増大度の解析的半群の非線形摂動、日本数学会、2012年3月28日、東京理科大学 (東京都)
  20. 白川健、渡邊 紘、結晶粒界現象と関連する1次元放物型連立方程式に対するエネルギー消散解、日本数学会、2012年3月28日、東京理科大学 (東京都)
  21. 渡邊 紘、強退化放物型方程式に対する初期値境界値問題の適切性、日本数学会、2012年3月28日、東京理科大学 (東京都)
  22. Y. Tomizawa, Y. Kobayashi and N. Tanaka, Global existence of unique solutions to nonautonomous differential equation in Banach spaces, Conference on Evolution Equations, Related Topics and Applications, 2012年3月19日、早稲田大学 (東京都)
  23. 白川健、渡邊 紘、結晶粒界の1次元 Kobayashi-Waren-Carter モデルに対する弱解の存在、日本数学会、2011年9月29日、信州大学 (長野県)
  24. 渡邊 紘、不連続な係数を持つ強退化放物型方程式に対する zero-flux 境界値問題、日本数学会、2011年9月29日、信州大学 (長野県)
  25. H. Watanabe, Solvability of boundary value problem for strongly degenerate parabolic equation with discontinuous coefficients, Dutch-Japanese Workshop, Analysis of non-equilibrium evolution problem: selected topics in material and life sciences, 2011年11月8日、Eindhoven University of Technology (オランダ)
6. 研究組織
- (1) 研究代表者
    - 松本敏隆 (MATSUMOTO, Toshitaka)
    - 広島大学・大学院理学研究科・助教
    - 研究者番号：20229561
  - (2) 研究分担者
    - 小林良和 (KOBAYASHI, Yoshikazu)
    - 中央大学・理工学部・教授
    - 研究者番号：80092691
  
    - 渡邊 紘 (WATANABE, Hiroshi)
    - サレジオ工業高等専門学校・助教
    - 研究者番号：30609912
  - (3) 連携研究者
    - 田中直樹 (TANAKA, Naoki)
    - 静岡大学・大学院理学研究科・教授
    - 研究者番号：00207119