様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　 ６ 月　 ４ 日現在

機関番号：１５５０１
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０２０９
研究課題名（和文）閉リーマン面上の特殊線形系およびＷｅｉｅｒｓｔｒａｓｓ点の研究

研究課題名（英文）Studies on special linear series and Weierstrass points on compact Riemann surfaces

研究代表者
加藤　崇雄（Kato, Takao）

山口大学・その他部局等・名誉教授

研究者番号：１００１６１５７

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,800,000円、（間接経費）　1,140,000円

研究成果の概要（和文）：閉リーマン面の研究における中心的課題のひとつとして，その上の有理型函数の存在性および等角不変量を介してのリーマン面の分類問題がある．本研究では与えられた空隙列をもつ Weierstrass 点の個数，またその挙動に関する成果，および，gonality また，その拡張概念である gonality 列の傾斜不等式に関する成果を得た．

研究成果の概要（英文）：One of main themes of the study of compact Riemann surfaces is a classification problem of Riemann surfaces by the existence of meromorphic functions on them and conformal invariants. We have studied this theme. We have gotten results concerning estimates of the number of Weierstrass points with prescribed gap sequences and behavior of gonality resp. gonality sequences, in particular, the slope inequality of them.

研究分野： 数物系科学

科研費の分科・細目： 基礎解析学・複素解析

キーワード： リーマン面　代数曲線　Weierstrass 点　gonality

１．研究開始当初の背景

(1) 閉リーマン面の研究においてその上の有理型函数の存在性，もしくは等角不変量を介してのリーマン面の分類問題は中心的研究課題のひとつである．C を閉リーマン面，n, r を自然数とするとき $W_n^r(C)$ を C 上の次数 n，次元 r の因子全体の Jacobi 多様体内の像とする．このとき，$W_n^r(C)$ の構造を解明することによってリーマン面の 1 つの分類が得られる．しかし，一般の n, r を与えたときにその構造を解明することは少なくとも現段階では殆ど不可能である．

(2) 重要な等角不変量として Weierstrass 点がある．この歴史は古く 19 世紀末にまで遡るが A. del Centina による綜合報告 “Weierstrass points and their impact in the study of algebraic curves: a historical account from the “Lückensatz” to the 1970s, Ann. Univ. Ferrara (2008) vol.54, pp.37–59” で 1970 年代までの歴史が 83 篇に及ぶ引用文献によって述べられると共にその報告の末尾に「1980 年以降の論文数はそれ以前 30 年間の論文数の 3 倍以上である」と結ばれている．研究の方向性は多岐にわたるが，とりわけ本研究に関連の深いものとして，ここではリーマン面の自己等角写像と空隙列との関連を扱った論文として Coppens, M., Weierstrass points with two prescribed non-gaps, Pacific J. Math., **131** (1988), 71–104., A. Del Centina, On certain remarkable curves of genus five, Indag Mathem, N.S., **15** (2004), 339–346. を挙げておく．

(3) $W_d^r(C)$ をより具体的に研究するために gonality（双有理 gonality）という概念を導入する．C 上の線形束のうち $\mathbb{P}^r$ への射および双有理射を与えるものを考え，そのような線形束が存在する最小の d を $d(C, r)$ および $s(C, r)$ と表す．列 $\{d(C, r)\}_{r>0}$，$\{s(C, r)\}_{r>1}$ をそれぞれ gonality 列，双有理 gonality 列という．もちろん，これらの量は等角不変量である．特に $r = 2$ の場合には $s(C, 2)$ は平面曲線として表現できる最小次数になる．簡単な考察によって，C の種数を g とするとき $(3 + \sqrt{8g+1})/2 \leq s(C, 2) \leq g + 2$ であり，$s(C, 2) = g + 2$ になるのは C が hyperelliptic であるときに限り，$s(2) = (3+\sqrt{8g+1})/2$ となるのは C が $s(C, 2)$ 次の非特異平面曲線であるときに限ることが分かる．Severi は一般の C に対しては $s(2) = [(2g+8)/3]$ であることを述べている（1921）．ここまでは古典的に知られている事実である．我々は科研費（基盤研究（C）「閉リーマン面上の特殊線形系」平成１９年〜２１年）において $s(C, 2)$ が比較的大きい場合のリーマン面の特徴付け，hyperelliptic 面の２葉被覆の場合の $s(C, 2)$ の挙動などに関していくつかの成果を得た．

一方 $d(C, r)$ については，Brill-Noether 理論の帰結として，一般の C に対しては $d(C, r)$ が決定されている，また C が hyperelliptic, bielliptic などの場合も容易に決定できる．さらにこれらの場合では，不等式 $(r+1)d(C, r) - rd(C, r+1) \geq 0$ がすべてに r について成り立つ（これを傾斜不等式と呼ぶ）．また，gonality 列は Clifford 指数，Brill-Noether 理論と密接な関わりがあるが，その文脈で Lange-Newstead はリーマン面上のベクトル束に関する Clifford 指数の定義を試みたがその前提として傾斜不等式の成立を仮定している．

２．研究の目的

(1) 研究開始当初の背景欄 (2) で述べた Weierstrass 点の研究については，Coppens, Del Centina の先行研究を踏まえつつ閉リーマン面の自己等角写像と Weierstrass 空隙列との関係をさらに追及することを目的とする．

(2) 研究開始当初の背景欄 (3) で述べた gonality 列に関してはごく最近 H. Lange と G. Martens によって傾斜不等式が成立しない面の例が得られた（実際には H. Lange, G. Martens, On the gonality sequence of an algebraic curve, manuscripta math. 137 (2012) 457–473 として刊行されている）．本研究ではこのような例を系統的に作ることと，Brill-Noether 数との関係を考察したい．さらに $d(C, r)$ と $s(C, r)$ との関連についても研究の目的になる．

３．研究の方法

(1) 山口大学所属の分担者とは随時セミナーを行い，研究の進捗状況の発表及び情報交換を行う．

(2) 学外の分担者（米田，大渕）相互に訪問し研究打ち合わせを行う．

(3) その他，各分担者との日常の情報交換には電子メールを最大限に活用する．

(4) 毎年，関連する研究者と共催で研究集会を開催する．その際可能な限り海外の研究者も招聘する．

(5) 本研究に関連する複素解析学，代数幾何学の各種研究集会で成果を発表するとともに他研

究者の成果を本研究に反映させる努力をする．
(6) 代表者もしくは分担者が複素解析学または代数幾何学関連の国際研究集会あるいは海外の学会で成果を発表する．

４．研究成果

(1) 研究開始当初の背景（１）で引用した del Centina の Indag. Math. 誌の論文に於いて彼は次の主張をした「種数 5 の閉リーマン面 C が空隙列 $\{1,2,3,5,9\}$ の Weierstrass 点を 24 点もち，さらに位数 2 の自己等角写像でそれによる C の商リーマン面が種数 1 になるもの（bielliptic involution という）が 3 つ存在するならば C は種数 3 の Fermat 曲線の 2 葉被覆になり 3 通りの等角同値類が存在する」この主張に対して本研究に於いて我々は雑誌論文①によって，bielliptic involution の存在の仮定は不要である（つまり当該空隙列をもつ Weierstrass 点が 24 点存在すれば必然的に 3 つの bielliptic involution が存在する）ことを示した．また雑誌論文⑥によってこの条件をみたす C の等角同値類は唯一決定され，それは Wiman 曲線と呼ばれているリーマン面であることを示した．ちなみにこのリーマン面は自己等角写像群の位数が 192 であり，それは種数 5 のリーマン面の自己等角写像群の位数の最大値を与える面として知られているものである．さらにこの論文では種数 5 の閉リーマン面 C が 3 つの bielliptic involution を持つ場合には空隙列 $\{1,2,3,5,9\}$ の Weierstrass 点の個数の可能性は 0, 4, 8, 24 しかないことを示した．ここでなぜ 16 個になることがないのかを究明することが今後の課題になると考えられる．

(2) 研究開始当初の背景（１）で引用した Coppens の先行論文および雑誌論文①に関連して次の成果を得た．Coppens は C を種数 $g > [(n^2-1)/2]$ の閉リーマン面とするとき，非空隙値が $n, n+2$ で始まる Weierstrass 点 P は n が奇数ならば存在せず，n が偶数の場合は存在すれば P を不動点とする位数 2 の C の自己等角写像が存在することを示した．($n=4$ の場合は約３０年前に研究代表者によって証明されている：T. Kato, Non-hyperelliptic Weierstrass points of maximal weight, Math. Ann. **239**(1979) 141–147.）本研究ではこの拡張として次の定理を得た．

定理．C を種数 g の曲線として P を非空隙値が $n, n+2$ で始まる Weierstrass 点で位数 2 の C の自己等角写像の不動点ではないと仮定する．(n が奇数ならば必然的に成り立つ仮定である）$\varepsilon = [(n^2-1)/2] - g$ として k を $\varepsilon \leq (k+1)([n/2]+1)-1$ を満たす最小の整数とする．このとき，$g \geq \min\{(n^2-3n+8)/2, (n^2+n+3)/3\}$ ならば，非空隙値が $n, n+2$ で始まる P と異なる Weierstrass 点は高々 k 点しかない．さらに，Q を P と異なる空隙値が $n, n+2$ で始まる Weierstrass 点とすると $(n+2)P$ は $(n+2)Q$ と（Abel の意味で）同値になる．

　この定理の簡単な帰結として $n=4$, $g=6,7$ の場合は bielliptic involution を誘導しない，非空隙値が 4,6,⋯ となる Weierstrass 点は高々１つであることが分かる（$g=5$ では不成立）．

(3) 研究の目的 (2) で述べた Lange-Martens の結果に関連して本研究では $g = 6, 9, 10, 12$ および $g \geq 14$ では傾斜不等式がみたされないような種数 g の閉リーマン面 C がつねに存在することを示した．さらに $g \geq 20$ では $3d(2,C) - 2d(3,C) < 0$ となるような C がつねに存在することを示した．さらに $(r+1)d(C,r) - rd(C,r+1) < 0$ が成り立つならば，次元 r, 次数 $d(C,r)$ の線形系の Brill-Noether 数は負であり，その絶対値はかなり大であることを示した．これらの結果は論文としてまとめて現在投稿中である．なお，$d(C,r)$ と $s(C,r)$ との関連については今後の研究課題として残った．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 10 件）

① Weierstrass Points on Bielliptic Riemann Surfaces, T. Kato, Hokkaido Math. J. 印刷中（査読有）

② Variability Regions of close-to-convex functions, T. Kato, T. Sugawa and L-M. Wang, Annales Polonici Mathematici, 印刷中 （査読有）

③ Weierstrass points with first non-gaps equal to n and $n+2$, T. Kato and M. Coppens, Kyushu J. Math. **68** (2014) no. 1 139–147. （査読有）

④ On a coefficient body for concave functions, R. Ohno, H. Yanagihara, Comput. Methods Funct. Theory **13** (2013), no. 2, 237–251. （査読有）

⑤ Weierstrass gap sequences at points of curves on some rational surfaces, J. Komeda, A. Ohbuchi, Tsukuba J. Math. **36** (2012), no. 2, 217–233.（査読有）

⑥ Bi-elliptic Weierstrass points on curves of genus 5, T. Kato, K. Magaard and H. Völklein, Indag. Math. (N.S.) **22** (2011), no. 1-2, 116–130. （査読有）

⑦ On Weierstrass semigroups of double coverings of genus three curves, J. Komeda, Semigroup Forum **83** (2011), no. 3, 479–488. （査読有）

〔学会発表〕（計 4 件）

① 米田 二良, Sequences of Weieratrass semigroup，代数幾何ミニ研究集会, 埼玉大学理学部（さいたま市） 2013 年 3 月 26 日

② 大渕 朗, ガロア点と自己同型について，代数幾何ミニ研究集会, 埼玉大学理学部（さいたま市） 2013 年 3 月 26 日

③ 加藤 崇雄, $n, n+2$ を最初の非空隙値に持つ Weierstrass 点に関するいくつかの注意，代数幾何ミニ研究集会, 埼玉大学理学部（さいたま市） 2012 年 3 月 6 日

④ M. Coppens and T. Kato, Remarks on Weierstrass points with first two non-gaps equal n and $n+2$, International Conference on Curve theory and Coding theory, 晋州市（韓国） 2012 年 2 月 20 日

６．研究組織

(1) 研究代表者

加藤 崇雄 (KATO TAKAO)
山口大学・名誉教授
研究者番号：10016157

(2) 研究分担者

増本　誠（MASUMOTO MAKOTO）
山口大学・理工学研究科・教授
研究者番号：50173761

柳原　宏 (YANAGIHARA HIROSHI)
山口大学・理工学研究科・教授
研究者番号：30200538

木内　功 (KIUCHI ISAO)
山口大学・理工学研究科・教授
研究者番号：30271076

米田 二良 (KOMEDA JIRYOU)
神奈川工科大学・基礎・教養教育センター・教授
研究者番号：90162065

大渕　朗 (OHBUCHI AKIRA)
徳島大学・大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部・教授
研究者番号：10211111