

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 16 日現在

機関番号：16301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540212

研究課題名(和文) 周期的およびランダムな磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの解析

研究課題名(英文) Spectrum of Schroedinger operators with periodic or random magnetic fields

研究代表者

野村 祐司 (NOMURA, YUJI)

愛媛大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：40282818

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円、(間接経費) 1,080,000円

研究成果の概要(和文)：ガウス曲率-1を持つポアンカレ上半平面上の磁場を持つシュレーディンガー作用素について研究した。磁場としては、定数磁場と、格子上に台を持つディラックデルタ測度の和となるものを考察する。まず、それぞれのランダウ準位が多重度無限大の固有値となるための十分条件を与えた。また、最小ランダウ準位については、上の条件が満たされなければ、固有値ではないことを証明した。

研究成果の概要(英文)：We consider the magnetic Schroedinger operators on the Poincare upper half plane with constant Gaussian curvature -1. We assume the magnetic fields is given by the sum of a constant field and the Dirac delta measures placed on some lattice. We give a sufficient condition for each Landau level to be an infinitely degenerated eigenvalue. We also prove the lowest Landau level is not an eigenvalue if the above condition fails.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：シュレーディンガー作用素 スペクトル

### 1. 研究開始当初の背景

磁場が一様でない系での量子輸送現象が、物理学では理論、実験の両面から、また数学においても注目されているが、その数学的研究は少ないのが当初の現状であり、周期的磁場、ランダムな磁場または非可換な群の作用で不変な磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルの数学的研究が重要と考えられた。

また、離散シュレーディンガー作用素は B. Helffer や J. Sjostrand により、磁場を持つシュレーディンガー作用素との密接な関連が指摘されていた。離散シュレーディンガー作用素のスペクトルについても、B. Simon 周辺の研究者や、日本では磯崎洋氏とその共同研究者により散乱問題も含め興味深い研究成果が現れてきていた。

### 2. 研究の目的

(1) 上半平面上の一様磁場と  $SL(2, \mathbb{R})$  の離散部分群の作用で不変な Aharonov-Bohm 磁場をもつシュレーディンガー作用素を調べ、保型形式、カスプ形式などの性質を使って、摂動によるランダウ準位に現れる影響を調べる。またそのことにより、非可換な群の作用や空間の負曲率が、スペクトルに及ぼす効果を追求する。さらに、これらの結果を、一般の  $SL(2, \mathbb{R})$  の離散部分群の場合に拡張する。

(2) 離散ラプラシアンに有限個のポテンシャルを摂動した時のスペクトルの変化、特に連続スペクトルの外に現れる固有値の現れ方を調べる。

### 3. 研究の方法

(1)  $SL(2, \mathbb{R})$  の離散部分群としてモジュラー群  $SL(2, \mathbb{Z})$  を考え、Eisenstein 級数や  $j$ -invariant と呼ばれる保形関数を用いてモジュラー群の作用で不変な Aharonov-Bohm 磁場を具体的に構成する。2006 年の峯氏との論文(ユークリッド平面上の一様磁場と周期的 Aharonov-Bohm 磁場をもつシュレーディンガー作用素のランダウ準位の研究) で使った作用素の分解を応用して、偏微分方程式の解を Eisenstein 級数、カスプ形式により与え、これを解析して無限遠方やカスプでの挙動を詳細に調べることにより固有関数の存在、非存在を結論付ける。

### (2)

$d$ -次元格子上の離散ラプラシアンに有限個の台をもつポテンシャルの摂動を考える。離散ラプラシアンのグリーン関数から作られる行列とポテンシャルから作られる行列とを用いて、摂動された作用素のグリーン関数表示を与え、これを解析することにより連

続スペクトルの外部にある離散固有値の様子を調べる。

### 4. 研究成果

(1) 双曲空間上の一様磁場と  $SL(2, \mathbb{R})$  の離散部分群の作用で不変な Aharonov-Bohm 磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトルの研究を行い、結果をまとめ、以下の論文として公表した。

Landau levels on the hyperbolic plane in the presence of Aharonov-Bohm fields, Journal of Functional Analysis 263 (2012), 1701-1743, T. Mine and Y. Nomura.

具体的な内容は以下である。負の定曲率をもつ上半平面上において、定数磁場 ( surface form の定数倍となる 2-形式 ) をもつシュレーディンガー作用素 ( Maass ラプラシアンとも呼ばれる ) は、連続スペクトルとその下に磁場の強さに応じて有限個の多重度無限大の固有値 ( ランダウ準位と呼ぶことにする ) をもつことが知られている。これに第一種 Fuchs 群の作用に関して不変な Aharonov-Bohm 磁場による摂動を加えた時に、このランダウ準位がどのように変化するかを調べた。まず、上半平面を第一種 Fuchs 群で割ってコンパクト化したリーマン面の種数が 1 の場合には、任意の点を代表点をして、この点の離散群による軌道に Aharonov-Bohm 磁場を配置した場合に、基本領域を貫く磁束の量に関して、ある閾値が存在し、この閾値を境にランダウ準位が固有値であるかどうか分かることを示すことができた。具体的には、それぞれのランダウ準位が多重度無限大の固有値となるための十分条件を与えた。また、最小ランダウ準位については、上の条件が満たされなければ、固有値ではないことを証明した。即ち、最小ランダウ準位に対しては、その存在の必要十分条件を、基本領域を貫く磁束の量によって与えたこととなる。また、最小ランダウ準位の多重度無限大性は、二次元の Pauli 作用素の 0-mode の無限次元性と同値である。これは、以前に峯氏とユークリッド平面上の同様な問題を考えた時に得られた結果の、上半平面の場合の対応する定理と理解される。しかし、違いは曲率から定まる項が新たに出てくると、格子点の代表点が楕円の固定点である時に、基本領域に現れる格子点の個数の数え方に注意しなければならないことである。以上の結果の証明においては、代表点のみに零点をもつ保型形式と、カスプ以外には零点をもたないカスプ形式の存在が鍵となる。これらをリーマン・ロッホの定理を援用して示すことができる。次にリーマン面の種数が 1 以上の場合については、基本領域内の稠密な点を格子の代表点に選んで、上と同様な結果が得られることが分かった。これらは、リーマン・ロッホの定

理とアーベルの定理からの帰結である。特に、具体例として、上半平面を離散部分群で割ってコンパクト化したリーマン面が種数1となるような合同部分群のときの格子の代表点として可能な点を、ある程度詳しく調べた。

(2) d-次元格子上の離散シュレディンガー作用素の固有値についての研究を行った。特に、離散ラプラシアンに有限個の台をもつポテンシャルを摂動した場合の離散固有値の個数を、離散ラプラシアンのグリーン関数から作られる有限行列とポテンシャルの符号数から決定することが、任意の次元においてできた。離散ラプラシアンのグリーン関数の発散条件により、次元dが1または2であるか、3以上であるかによって異なる定式化が必要となる。

次に、d-次元格子上の離散シュレディンガー作用素の連続スペクトルに埋め込まれた固有値についての研究が進展中である。有限個のポテンシャルの場合には、連続スペクトルの内部には埋め込まれた固有値は存在しないことが磯崎-森岡により証明されている。しかし、連続スペクトルの端点においては、固有値が存在する可能性があり、ポテンシャルの台が一点の場合には次元によって状況が異なることが知られていた。有限個の台を持つ場合にこの端点が固有値となるかという問題について、限定的な結果が得られた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

1. Takuya Mine and Yuji Nomura  
Landau levels on the hyperbolic plane in the presence of Aharonov-Bohm fields, Journal of Functional Analysis 263 (2012), 1701-1743, 査読有

[学会発表](計 8 件)

1. 離散シュレディンガー作用素のレゾナンスについて, 2014年松本作用素論セミナー, 2014年3月9日, 東横イン松本駅前会議室
2. The spectrum of Schroedinger operators with magnetic fields invariant under the action of discrete groups, 文科省WS「非可換調和振動子のスペクトルと量子デバイスの数理」2012年11月27日, 九州大学数理学研究院
3. 上半平面上の離散群の作用で不変な磁場シュレディンガー作用素のスペクトル

について, 広島微分方程式研究会, 2012年10月5日, 広島大学理学部

4. 上半平面上の周期的Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレディンガー作用素のランダウ準位, 日本数学会 2012年度秋季総合分科会, 2012年9月19日, 九州大学
5. 離散群の作用で不変な磁場を持つ上半平面上のシュレディンガー作用素のスペクトルについて, 学習院スペクトル理論セミナー, 2012年5月12日, 学習院大学南4号館
6. ユークリッド平面および上半平面上の周期的磁場を持つシュレディンガー作用素のスペクトルについて, 神楽坂解析セミナー, 2012年4月28日, 東京理科大学神楽坂校舎
7. Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレディンガー作用素のスペクトル, 浜松偏微分方程式セミナー, 2011年11月26日, 鈴丘大学工学部
8. The spectrum of Schroedinger operators with periodic or random Aharonov-Bohm magnetic fields, Linear and Nonlinear Waves, No.9, 2011年11月3日, ピアザ淡海 滋賀県立県民交流センター

[図書](計 0 件)

[産業財産権]  
出願状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
出願年月日:  
国内外の別:

取得状況(計 0 件)

名称:  
発明者:  
権利者:  
種類:  
番号:  
取得年月日:  
国内外の別:

[その他]  
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

野村 祐司 (NOMURA YUJI)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号：40282818

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者

伊藤 宏 (ITOHI HIROSHI)  
愛媛大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：90243005

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)  
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授  
研究者番号：90378597