

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 7 日現在

機関番号：16401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540213

研究課題名(和文) 超越整関数のファトウ成分と特異値についての研究

研究課題名(英文) A study on Fatou components of transcendental entire functions and singular values

研究代表者

諸澤 俊介 (Morosawa, Shunsuke)

高知大学・教育研究部自然科学系理学部門・教授

研究者番号：50220108

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,500,000円

研究成果の概要(和文)：超越整関数の複素力学系の研究を行った。特に有理関数の力学系では決して現れることのないファトウ成分である遊走領域とベーカ領域について調べた。超越整関数がこれらの領域を持つには、無限個の特異値を持つことが必要となる。そこで、無限個の特異値をうまく扱うことができる遊走領域やベーカ領域を持つことがある超越整関数族を考えた。そして、超越整関数に広義一様収束する適当な多項式列を考えることにより、遊走領域やベーカ領域の特徴付けを与えた。またそれらの関数族のパラメータ空間の収束を示した。

研究成果の概要(英文)：I studied complex dynamics of transcendental entire functions. In particular, I investigated wandering domains and Baker domains which are Fatou components never appeared in complex dynamics of rational functions. In the case where transcendental function have those domains, the functions necessarily have infinitely many singular values. I chose a family of transcendental entire functions whose singular values are well controlled. Furthermore, some functions of the family have wandering domains or Baker domains. I gave some characterization of wandering domains and Baker domains in the family by using locally uniformly polynomial sequences. I also showed the Caratheodory convergence of components in parameter spaces.

研究分野：複素力学系

キーワード：複素力学系 超越整関数 特異値 遊走領域 ベーカ領域 力学的収束 広義一様収束 ハウスドルフ収束

1. 研究開始当初の背景

複素力学系の研究は大きく分けて有理関数を対象とするものと超越整関数を対象とするものがある。有理関数の力学系については現在の研究の基礎としてファトウ成分の分類定理、ファトウ周期成分の個数評価などが示されている。しかしまだ2次多項式のマンデルブロー集合についての大きな問題が残っている。超越整関数の力学系は、その対象となる関数の種類の多さから統一的な研究がなされていない。ジュリア集合については非有界性と hair と呼ばれるジュリア集合の部分集合から複雑となる。また、ファトウ集合の成分では遊走領域、ベーカー領域と呼ばれる有理関数の力学系では存在しないものが現れることがある。これらの成分は特異値が有限個しか存在しない超越整関数では現れないことが知られている。

2. 研究の目的

超越整関数の力学系特有のファトウ成分、すなわち遊走領域とベーカー領域を調べることが目的である。どのような関数がかこれらのファトウ成分を持つかを調べる。また、これらの成分を持つ関数に対し、それを含む適当な関数族を考える。そのパラメータ空間を考え、遊走領域やベーカー領域を持つパラメータからなるパラメータ空間の成分を調べる。

3. 研究の方法

基本的に個人研究として行った。パーソナルコンピュータで自分でプログラムを書き、データを集める。それらを視覚化し、問題の妥当性を考察し、証明を考える。科研費の多くは研究連絡、情報収集及び成果発表の出張旅費として使用した。超越整関数の力学系の研究はヨーロッパで盛んなので、関連する研究会に参加し、情報収集を行った。

4. 研究成果

(1) 超越整関数の1パラメータ関数族として $f_{\{a\}}(z) = z + e^z + a$ を考える。これはパラメータにより遊走領域あるいはベーカー領域を持つことがある。多項式は決して遊走領域もベーカー領域も持つことはない。しかし、超越整関数は適当な多項式列の広義一様収束極限関数として考えることができる。そこで多項式列として $P_{\{a, n\}}(z) = (1 + a/n)z + (1 + z/n)^{n+1} + a$ をとる。これは $f_{\{a\}}(z)$ に広義一様収束する。この力学的収束、すなわちジュリア集合のハウスドルフ収束、ファトウ集合のカラテオドリ収束を示すことができた。このことによりベーカー領域が発散する超吸引不動点からなる直接鉢のカラテオドリ収束の極限として理解できることが示された。また、遊走領域は周期が発散する周期成分のカラテオドリ収束の極限として理解できることが示された。さ

らに $f_{\{a\}}$ のパラメータ空間と各 $P_{\{a, n\}}$ のパラメータ空間を考えた。そしてベーカー領域に対応する $f_{\{a\}}$ のパラメータからなる成分に対し、 $P_{\{a, n\}}$ のパラメータ空間の双曲成分がカラテオドリ収束することを示した。また、 $f_{\{a\}}$ が遊走領域を持つパラメータの幾つかの成分について、 $P_{\{a, n\}}$ のパラメータ空間の双曲成分がカラテオドリ収束することを示した。

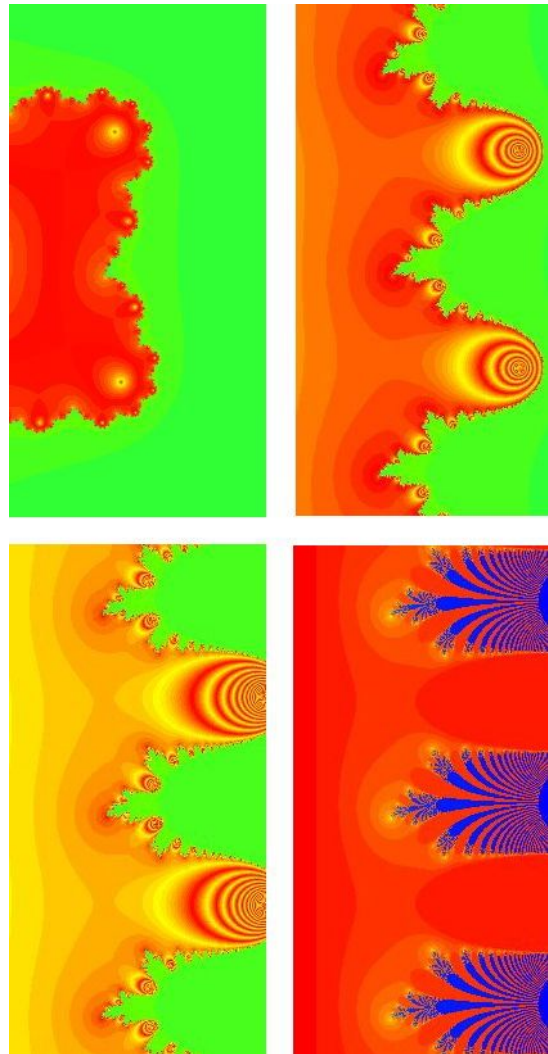


図1 ベーカー領域へのカラテオドリ収束

(2) R を原点が反発不動点となる有理関数とする。そしてその乗法因子を a とする。この時関数等式 $f(az) = R(f(z))$ をシュレーダー関数等式と呼び、 f をシュレーダー関数と呼ぶ。このシュレーダー関数について、特異値の一つである漸近値について日本工業大学(現在は放送大学)の石崎克也と考察した。そして幾つかのシュレーダー関数について、その漸近値の個数評価をした以前の結果を少し発展することができた。

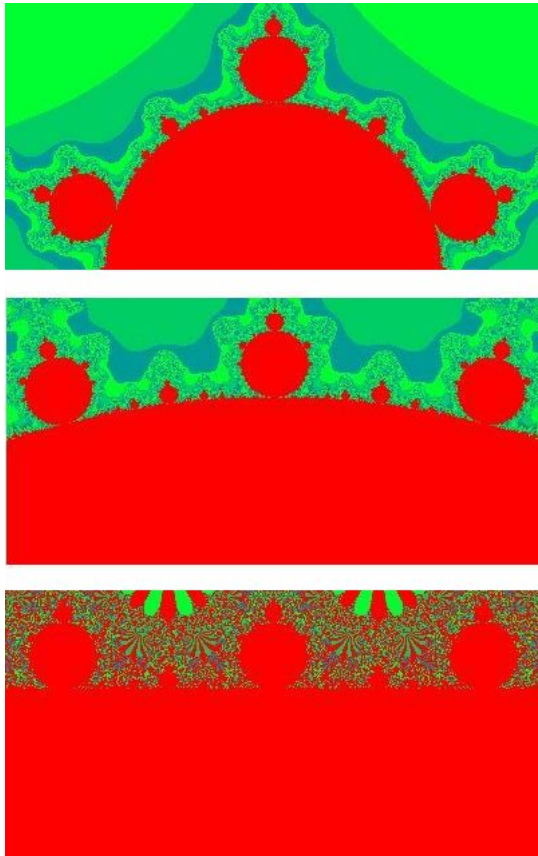


図 2 パラメータ空間のカラテオドリ収束

- (3) ジュリア集合の点でファトウ成分の境界に含まれないものを埋蔵点と呼ぶ、さらにそれらの点からなる集合を剰余ジュリア集合と呼ぶ。超越整関数のジュリア集合には hair と呼ばれる曲線が含まれることがある。例えば、ある種の誤差関数のジュリア集合は適当な hair が剰余ジュリア集合に含まれることが以前にわかっている。このように 1 点でない成分として剰余ジュリア集合の部分集合が含まれるかを考えてみた。そしてブラッシュケ積の場合に単位円周が剰余ジュリア集合に含まれるものを構成することができた。
- (4) 複素力学系は一つの正則関数の反復合成によって起こる事象の研究である。幾つかの正則関数を用意して、その合成を積とみなし、半群を考える。その半群の元の列について、定義された点の近傍で正規族となるか、ならないかでファトウ集合とジュリア集合を定義することができる。このような研究対象を半群の力学系と呼ぶ。半群の力学系では、その生成元が有理関数だけからなる場合でも遊走領域を持つ場合がある。このことから興味を持ち半群の力学系についても研究をした。ある種の有理関数のジュリア

集合は擬円とカントール集合の直積となることが知られている。有理関数の半群の力学系で円とカントール集合の直積となるものを求めることができた。また半群の力学系は反復力学系と異なり、全平面がジュリア集合とならないがジュリア集合がない点を持つ場合がある。ジュリア集合が円とカントール集合の直積となる有理関数の半群の構成方法からそのジュリア集合が内点を持たないがそのハウスドルフ次元がいくらでも 2 に近いものを構成することができた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 2 件)

Shunsuke Morosawa, Dynamical convergence of a certain polynomial family to $f_{\{a\}}(z)=z+e^z+a$, Ann. Acad. Sci. Fenn. Math., 査読有, 40(2015), 449-463.

Katsuya Ishizaki, Shunsuke Morosawa and Mitsunori Yakou, Meromorphic solutions of functional equations $f(G(z))=R(f(z))$, 査読有, Complex Var. Elliptic Equ., 57(2012), 15-22, DOI:10.1080/17476933.2010.504833

〔学会発表〕(計 8 件)

Shunsuke Morosawa, Dynamics of Transcendental Entire Functions, 2nd Japan - Nepal Joint Workshop Around Coding theory, Dynamical systems and related topics, 2015 年 11 月 25 日, Tribhuvan University, Katmandu (Nepal).

諸澤 俊介, カントールの型ジュリア集合を持つ有理半群の力学系について, 2015 年 3 月 23 日, 2015 年度日本数学会年会 明治大学(東京都・千代田区)

諸澤 俊介, Semigroups whose Julia sets are Cantor targets, RIMS Workshop on Complex Dynamics, 2014 年 12 月 9 日, 京都大学数理解析研究所(京都府・京都市)

Shunsuke Morosawa, Dynamical convergence of a certain polynomial family to $f_{\{a\}}(z)=z+e^z+a$, 2014 年 3 月 11 日, International Conference on Advances in Dynamical Systems, Kishangarh(India).

諸澤 俊介, $f_{\{a\}}(z)=z+e^z+a$ へのある多項式列の力学的収束について, 2014 年 1 月 10 日, 「等角写像論・値分布論」合同研究集会, 法政大学市ヶ谷キャンパス(東京都・千代田区)

諸澤 俊介, $f_{\{a\}}(z)=z+e^z+a$ へ

のある多項式列の力学的収束について,
2013年9月26日, 2013年度日本数学会
秋季総合分科会, 愛媛大学(愛媛県・松
山市)

諸澤 俊介, Caratheodory convergence
to Baker domains or wandering domains,
2012年12月12日, 複素力学系の新展
開, 京都大学数理解析研究所(京都
府・京都市)

諸澤 俊介, ブラシュケ積の剰余ジュ
リア集合について, 2012年1月23日,
複素力学系の総合的研究, 京都大学数
理解析研究所 京都大学理学部(京都
府・京都市)

〔その他〕

ホームページ等

[http://www.math.kochi-u.ac.jp/morosawa/
index.html](http://www.math.kochi-u.ac.jp/morosawa/index.html)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

諸澤 俊介 (Morosawa Shunsuke)

高知大学・教育研究部自然科学系理学部
門・教授

研究者番号: 50220108