

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 8 日現在

機関番号：15401

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540217

研究課題名(和文) 複素空間の有理型凸性とシュタイン性

研究課題名(英文) MEROMORPHIC CONVEXITY AND STEINNESS FOR COMPLEX SPACES

研究代表者

阿部 誠 (ABE, MAKOTO)

広島大学・理学(系)研究科(研究院)・教授

研究者番号：90159442

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：シュタイン空間は十分多くの正則関数が存在する数学的な対象である。そして、 n 個の複素数の組全体の空間内の擬凸領域はシュタイン空間の典型的な例である。この研究において、複素空間の有理型凸性とシュタイン性に関連して、シュタイン空間のカルチエ因子の余零、シュタイン軌道体の領域のシュタイン性・局所シュタイン性、単葉型開リーマン面の領域の強い円板的性質について、いくつかの新しい結果を得た。

研究成果の概要(英文)：A Stein space is a mathematical object on which there exist sufficiently many holomorphic functions. A pseudoconvex domain in the space of the n -tuples of complex numbers is a typical example of a Stein space. In this course of studies, related to the meromorphic convexity and Steinness for complex spaces, some new results are obtained on the extra zeros of Cartier divisors in a Stein space, on the Steinness or the local Steinness of domains in a Stein orbifold, and on the strong disk property for domains in an open planar Riemann surface.

研究分野：数物系科学

キーワード：複素空間 シュタイン空間 シュタイン多様体 有理型凸性

1. 研究開始当初の背景

複素空間 X について、 X の任意のコンパクト集合 K の X における有理型凸被がコンパクトであるとき、 X は有理型凸であるという。また、複素空間 X の領域 D について、 D 内の任意のコンパクト集合 K の X における有理型凸被と D との共通部分がコンパクトであるとき、 D は有理型 $0(X)$ 凸であるという。Stein 空間 X の領域 D について、 D が有理型 $0(X)$ 凸であることは、 D 内の任意のコンパクト集合 K の X における有理型凸被が D に含まれることと同値であり、また、有理型 $0(X)$ 凸領域 D 上の正則関数について、有理型近似定理が成立する (阿部 (2005))。さらに、Stein 空間 X の領域 D が有理型 $0(X)$ 凸ならば、 D は X 上のある正則関数族 F の Fatou 集合である (阿部 (2005))。一方、Stein 多様体 X 、すなわち、特異点をもたない Stein 空間 X の任意の正則関数族 F の Fatou 集合は有理型 $0(X)$ 凸である (阿部・古島 (2000))。また、Stein 多様体 X の領域 D が単連結かつ有理型 $0(X)$ 凸であれば、 D は強い円板的性質をもつ (阿部 (2006))。

2. 研究の目的

特異点をもつ一般の Stein 空間に対しては、Levi の問題、およびそれに関連する事柄についての満足すべき結果が得られていないために、例えば、有理型 $0(X)$ 凸領域、および正則関数族の Fatou 集合の特徴付けの問題も不十分である。Levi の問題に加えて、次の問題の考察が必要である。

問題 1: Stein 空間 X のコンパクト集合 K について、 K の X における有理型凸被の内部は X において有理型 $0(X)$ 凸か？

問題 2: Stein 空間 X の領域 D について、 D が有理型凸ならば D は Stein か？

問題 3: Stein 空間 X の領域 D について、標準写像 $H^1(D, 0) \rightarrow H^1(D, M)$ が零写像であれば、他の付加的な条件の下で、 D は Stein

か？

シュタイン空間の一般的な構造の解明に寄与することを目指して、これらの問題のうち、問題 2, 3 についての少なくとも部分的な解決のために、シュタイン空間において、因子群や因子の余零に関する問題との関係にも注目しつつ、開集合のシュタイン性・有理型凸性に関連する解析的または幾何的性質の研究を行う。

3. 研究の方法

もし問題 1 が肯定的であれば、特異点をもつ一般の Stein 空間における正則関数族の Fatou 集合の状況は Stein 多様体の場合と同様である。また、 D がコホモロジー的 2 完備という条件の下で、もし問題 3 が肯定的であれば、問題 2 も肯定的である。問題 3 において、標準写像 $H^1(D, 0) \rightarrow H^1(D, M)$ が零写像という仮定の代わりに、標準写像 $H^1(D, 0^*) \rightarrow H^1(D, M^*)$ が零写像という仮定をおけば、これは Picard 群 $\text{Pic}(D) = H^1(D, 0^*)$ から因子群 $\text{Div}(D)$ への標準写像の全射性と同値である。したがって、Stein 空間における Cartier 因子の余零に関する問題の解決を試みることや岡・Grauert の原理をみたす領域の Stein 性を考察することは、問題 2, 3 の解決のための緒となる。以上の観点に立って、次の方針に従い、研究を行う。

- (1) Stein 空間 X の有理型 $0(X)$ 凸領域の研究に関連して、単葉型 Riemann 面 X 内の領域 D の Runge 性と強い円板的性質の関係についての研究を継続する。
- (2) Stein 軌道体 X 内の岡・Grauert の原理をみたす開集合 D の Stein 性に関連する諸結果を公表する過程を経て、研究の次のステップへの準備とする。
- (3) Stein 空間における Cartier 因子と余零に関する問題を解決する。
- (4) $\text{Sing}(X)$ が離散的であるような Stein 軌道体 X の領域 D について、標準写像

$H^1(D, 0^*) \rightarrow H^1(D, M^*)$ が零写像という条件, および他の付加的な条件から D の Stein 性を導く.

- (5) 以上の準備のもとに, Stein 軌道体 X 内の領域 D について, 問題 3 の部分的な解決を試みる.

4. 研究成果

阿部誠 (研究代表者) は以下の研究成果を得た.

- (1) 中村豪と共同で, 正規化が単葉型 Riemann 面であるような 1 次元 Stein 空間 X 内の領域 D の Runge 性と強い円板的性質の関係についての研究を継続しつつ, 得られた諸結果の証明を改良し, それらの内容に関する論文「Strong disk property for domains in open Riemann surfaces」(共著)を学術雑誌に投稿した. また, 準備的な段階における内容について, 「玉原多変数複素解析研究会」で講演を行った.
- (2) Stein 軌道体 X 内の岡・Grauert の原理をみたま領域 D の Stein 性・局所 Stein 性に関連する諸結果に関する論文「Open sets which satisfy the Oka-Grauert principle in a Stein space」を学術雑誌「Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 4」に掲載するとともに, この研究を継続する過程で, Stein 空間 X と Stein 写像 $\pi: D \rightarrow X$ が存在するような複素空間 D のコホモロジー的完備性に関するひとつの結果, および付加的な条件の下での Stein 性に関するひとつの結果を得た. これらの内容も含めて, 「第 54 回函数論シンポジウム」において講演を行った.
- (3) 野口潤次郎・濱野佐知子 (連携研究者) と共同で, Stein 空間の Cartier 因子の余零に関する問題, すなわち, Stein 空間内の超曲面の法束の自明性の判定に関

する問題を研究し, 得られた諸結果に関する論文「On Oka's extra-zero problem and examples」(共著)を学術雑誌

「Mathematische Zeitschrift」に掲載した. 具体的には, Stein 空間 X の因子 D が余零をもつためには, D の定める $\text{Supp}(D)$ 上の法束 $N(D)$ の第 1 Chern 類が消滅することが同値であることを証明した. したがって, $\dim X \leq 2$ の場合, X の任意の因子 D は余零をもつ. 一方, $\dim X \geq 3$ のとき, この条件が必ずしもみたされないことを示すいくつかの例を与えた. 特に, D が非特異かつ既約な場合の例を与えることにより, 上田の問題を解決した.

- (4) $\text{Sing}(X)$ が離散的であるような純 n 次元 Stein 軌道体 X の領域 D が Stein であるためには, 2 条件
- $H^k(D, 0) = 0$ ($2 \leq k \leq n - 1$),
 - 標準写像 $H^1(D, 0^*) \rightarrow H^1(D, M^*)$ は零写像である,
- がみたされることが同値であることを証明し, この内容に関する論文「Holomorphic line bundles and Cartier divisors on domains in a Stein orbifold with discrete singularities」を学術雑誌「Toyama Mathematical Journal」に掲載した.
- (5) 2 次元 Stein 軌道体 X の領域 D に対して, 問題 3 は付加的な条件なしに肯定的であり, したがって, 問題 2 も肯定的であるという結果を得た. この内容について, 「The 22nd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications」および「2014 年度多変数関数論冬セミナー」において講演を行い, また関連する内容も含めて, 「日本数学会 2014 年度年会函数論分科会」において特別講演を行った.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計7件)

- ① Makoto Abe, Holomorphic line bundles and Cartier divisors on domains in a Stein orbifold with discrete singularities, Toyama Mathematical Journal, vol. 36, pp. 15-26, 2013・2014, 査読有
<http://hdl.handle.net/10110/13440>
- ② 阿部 誠, Stein 空間内のある種のコホモロジー的条件をみたす領域について, 多変数関数論冬セミナー 2014, 金沢, 2014年12月20日~22日, pp. 33-37, 2014, 査読無
- ③ Makoto Abe, A cohomological characterization for Stein open sets in a 2-dimensional Stein orbifold, The 22nd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Gyeongju, Korea August 8-11, 2014, Dongguk University, pp. 34-35, 2014, 査読無
- ④ 阿部 誠, 複素空間の有理型凸性と Stein 性, 函数論分科会講演アブストラクト, 日本数学会 2014 年度年会, 学習院大学, 2014年3月15日~3月18日, pp. 45-49, 2014, 査読無
- ⑤ Makoto Abe, Sachiko Hamano, and Junjiro Noguchi, On Oka's extra-zero problem and examples, Mathematische Zeitschrift, vol. 275, no. 1-2, pp. 79-89, 2013, 査読有
DOI: 10.1007/s00209-012-1123-8
- ⑥ Makoto Abe, Open sets which satisfy the Oka-Grauert principle in a Stein space,

Annali di Matematica Pura ed Applicata, Ser. 4, vol. 190, pp. 703-723, 2011, 査読有

DOI 10.1007/s10231-010-0170-1

- ⑦ 阿部 誠, Stein 空間内の岡・Grauert の原理をみたす領域, 第 54 回函数論シンポジウム講演アブストラクト, 千葉大学, 2011年10月8日~10月10日, pp. 59-68, 2011, 査読無

[学会発表] (計13件)

- ① 阿部 誠, Holomorphic line bundles and Cartier divisors on domains in a Stein orbifold with discrete singularities, 平成 25 年度複素解析ワークショップ, 広島工業大学, 広島市, 2015 年 3 月 7 日~3月8日
- ② 阿部 誠, Stein 空間内のある種のコホモロジー的条件をみたす領域について, 2014 年度多変数関数論冬セミナー, 金沢大学: 金沢市サテライトプラザ, 金沢市, 2014 年 12 月 20 日~12 月 22 日
- ③ Makoto Abe, A cohomological characterization for Stein open sets in a 2-dimensional Stein orbifold, The 22nd International Conference on Finite or Infinite Dimensional Complex Analysis and Applications, Dongguk University, Gyeongju, Korea, 2014 年 8 月 8 日~8 月 11 日
- ④ 阿部 誠, 複素空間の有理型凸性と Stein 性, 日本数学会 2014 年度年会函数論分科会, 学習院大学, 東京都豊島区, 2014 年 3 月 15 日~3 月 18 日, 特別講演
- ⑤ 阿部 誠, Meromorphic convexity and Steinness for complex spaces, 平成 25 年度複素解析ワークショップ, 広島工業大学, 広島市, 2014 年 3 月 1 日~3 月 2 日
- ⑥ 阿部 誠, Strong disk property for

domains in a Stein space of dimension 1, 平成 25 年度複素解析セミナー, 広島工業大学, 広島市, 2013 年 5 月 1 日～5 月 2 日

- ⑦ 阿部 誠, An extension of the theorem of Kajiwara-Nishihara to higher dimensional spaces, 平成 24 年度複素解析ワークショップ, 広島工業大学, 広島市, 2013 年 3 月 16 日～3 月 17 日
- ⑧ 阿部 誠, 2 次関数と試験の成績?, 平成 24 年度広島大学公開講座: 数学の基礎と展望, 広島大学, 東広島市, 2012 年 8 月 10 日
- ⑨ 阿部 誠, Holomorphic line bundles and Cartier divisors on domains of a Stein orbifold, 広島複素解析セミナー, 広島大学, 東広島市, 2011 年 12 月 9 日
- ⑩ 阿部 誠, Stein 空間内の岡・Grauert の原理をみたす領域, 第 54 回函数論シンポジウム, 千葉大学, 千葉市, 2011 年 10 月 8 日～10 月 10 日
- ⑪ 阿部 誠, 強い円板的性質をみたす領域について, 玉原多変数複素解析研究集会, 東京大学: 玉原国際セミナーハウス, 沼田市, 2011 年 9 月 21 日～9 月 24 日
- ⑫ 阿部 誠, シュタイン空間内の岡・グラウエルトの原理をみたす領域, 複素解析幾何セミナー, 東京大学, 東京都目黒区, 2011 年 6 月 20 日
- ⑬ 阿部 誠, Julia の予想と有理型凸性, 第 175 回数理情報科学セミナー, 広島大学, 東広島市, 2011 年 6 月 8 日

[図書] (計 1 件)

- ① 阿部 誠・島 唯史・本田 竜広 編, 多変数関数論冬セミナー 2011: 予稿集, ニシキプリント, 広島, 全56+4頁, 2011年12月16日

[その他]

ホームページ等

http://www.mis.hiroshima-u.ac.jp/index_j.html

6. 研究組織

(1) 研究代表者

阿部 誠 (ABE MAKOTO)
広島大学・大学院理学研究科・教授
研究者番号: 90159442

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

島 唯史 (SHIMA TADASHI)
広島大学・大学院工学研究院・准教授
研究者番号: 30226196

濱野 佐知子 (HAMANO SACHIKO)

福島大学・人間発達文化学類・准教授
研究者番号: 10469588