

## 科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 5 月 23 日現在

機関番号：17401

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540218

研究課題名(和文) 正則変動関数論を用いる非線形微分方程式の解の精密な漸近解析：振動理論の表側と裏側

研究課題名(英文) Precise asymptotic analysis of solutions of nonlinear differential equations by means of regular variation: The theoretical face and back sides for oscillation theory

研究代表者

谷川 智幸 (Tanigawa, Tomoyuki)

熊本大学・教育学部・准教授

研究者番号：10332008

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,600,000円

研究成果の概要(和文)：微分方程式の振動理論は、与えられた微分方程式の解の零点分布の法則性を分析して、すべての解が振動する状況の特徴付けることを主要な目標とする研究分野である。研究遂行のためには、振動しない解(非振動解)の性質、特に無限遠における漸近挙動に関する情報の入手が不可欠であり、その意味で、振動理論においては、微分方程式の振動性と非振動性の両面の追求が表裏一体を成している。本研究課題の目的は、このような振動理論に対する表側と裏側の両面からの研究を行い、非線形微分方程式の解の振動性とその解の漸近挙動の精密な解析を行い、それを拠り所として解の全体構造を解明することである。

研究成果の概要(英文)：The purpose of this research subject is devoted to the asymptotic analysis of the nonoscillatory behavior of several types of the nonlinear differential equations. Our main results obtained are as follows.

(1) The existence and the asymptotic behavior for the large value of the variable of the positive solutions of generalized Thomas-Fermi equation are proved. (2) We establish a sharp condition of the existence of generalized regularly varying functions (in the sense of Karamata) of self-adjoint functional differential equation. (3) We devote to the asymptotic analysis of a class of the third order sublinear differential equation. (4) We demonstrate that the method of regular variation can be effectively applied to fourth order quasilinear differential equations. (5) We show that an application of the theory of regular variation gives the possibility of determining the existence and precise asymptotic behavior of positive solutions of the third order nonlinear differential equation

研究分野：数物系科学

キーワード：微分方程式論 振動理論

1. 研究開始当初の背景

微分方程式の振動理論は、1836年の C. Sturm の比較原理に関する論文 (Mémoire sur les équations différentielles linéaires du second ordre, J. Math. Pures Appl. 1 (1836), 106-186)

から始まり、20世紀の前半まで"線形振動理論"と呼ぶに相応しい理論の体系化が行われた。20世紀の後半からは、非線形微分方程式と線形微分方程式との本質的な相違を看破した F. V. Atkinson の画期的な論文

(On second-order nonlinear Oscillations, Pacific J. Math. 5 (1955), 643-647.)

に触発されて、革新的な "非線形振動理論" の建設ラッシュが始まり、その非線形振動理論は、徐々に質的にも量的にも体系的になってきていたと言える。しかし、研究開始当初においては、解の全体構造の解明に重要な非振動解の漸近挙動の研究に関しては、完全に把握されているとは到底言えない状況であった。

2. 研究の目的

本研究の目的は、「研究開始当初の背景」で述べた "非線形振動理論" の進展に寄与することで、特に非線形 (高階) Sturm-Liouville 型微分方程式の解の振動性及び解の漸近挙動の精密な解析を行い、それを拠り所として解の全体構造を解明することである。

3. 研究の方法

(1) 先行研究を総括するために、国内外の大学に赴き、文献の収集やインターネット (Math.Sci.Net.etc) を駆使した。

(2) 研究経過を定期的に振動理論の世界の権威である草野尚教授に報告して批判と助言を求めた。また、同方面で活躍している国内外の微分方程式の専門家と直接に面会して、討論、意見交換、情報交換を行い研究連絡活動を積極的に実施した。

(3) 得られた研究成果を微分方程式関連の国内外の研究集会において発表し周囲の意見を拝聴することを心掛けた。

4. 研究成果

本研究の実施において得られた新しい結果及び新しい情報は主に次のようなものである。

(1) 劣半分線形版の一般化された Thomas-Fermi 型微分方程式の係数関数に正則変

動という条件を課して、正值解の存在と無限遠における漸近挙動を解析している。具体的には、水上等 (論文を書くこと) が求めている振動条件 (すべての解が振動するための条件) と非振動条件 (すべての解が振動しないための条件) を基に、強減衰解と強増大解の無限遠における漸近挙動を正則変動関数理論の範疇で考察し、詳細な情報を獲得した。(以下の「主な発表論文等」[雑誌論文]の欄(9))

(2) 進みと遅れの変数を含む混合型の 2 階関数微分方程式の正值解の存在と無限遠における漸近挙動を一般化された正則変動関数理論の枠組みの中で考察している。一般化された正則変動関数理論は、草野と Jaros (スロバキア) によって創始されたもので自己随伴型の微分方程式の解の漸近挙動の解析に適していることが知られている。得られた研究成果は、正值解の漸近挙動に強い影響を与える微分作用素の内の係数関数に積分発散条件を課し、一般化された緩変動解及び一般化された指数 1 の正則変動解の存在とその漸近挙動を求めている。(以下の「主な発表論文等」[雑誌論文]の欄(8))

(3) 劣線形版 3 階の Emden-Fowler 型微分方程式の正值解の存在とその無限遠における漸近挙動を正則変動関数理論の枠組みの中で考察し、強減衰解と緩やかに増加する増大解の精密な漸近挙動を解明している。具体的には、減少緩変動解、指数負の正則変動解、増大緩変動解、指数 1 の正則変動解さらに指数 2 の正則変動解の存在条件とそれらの精密な漸近挙動を求めている。(以下の「主な発表論文等」[雑誌論文]の欄(7))

(4) 劣半分線形版 4 階の Emden-Fowler 型微分方程式の正值解を無限遠における漸近挙動に従って、7つのタイプに分類しその内の中間オーダー解の存在性と無限遠における漸近挙動を求めている。(以下の「主な発表論文等」[雑誌論文]の欄(6))

(5) 劣半分線形版 3 階 Emden-Fowler 型微分方程式の正值解を無限遠における漸近挙動に従って、5つのタイプに分類しそれらの解の存在性と無限遠における漸近挙動を求めている。具体的には、中間オーダータイプ以外の解に対しては、存在するための必要十分条件を導いている。一方、中間オーダー解の存在と漸近挙動に対する解析に対しては、方程式の係数関数に正則変動の条件を課し、精密な漸近挙動を導き、具体的な解の形も示している。(以下の「主な発表論文等」[雑誌論文]の欄(5))

(6) 3階 Emden-Fowler 型微分方程式の正値解を無限遠における漸近行動に従って、5つのタイプに分類しそれらの解の存在性と無限遠における漸近挙動を求めている。具体的には、中間オーダータイプ以外の解に対しては、存在するための必要十分条件を導き、中間オーダー解に対しては、方程式の係数関数に正則変動の条件を課し、精密な漸近挙動を導いている。(以下の「主な発表論文等」[雑誌論文]の欄(4))

(7) 2階非線形微分方程式系の減少正値解の無限遠における漸近挙動を正則変動関数理論の範囲で考察し、正則変動解の存在とそれらの漸近挙動を求めている。また、得られた結果を確かめるために具体的な方程式系を作成し正則変動解の存在を保証している。(以下の「主な発表論文等」[雑誌論文]の欄(3))

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 10 件)

(1) J. Manojlovic and T. Tanigawa, Regularly varying solutions of half-linear differential equations with retarded and advanced arguments, *Mathematica Slovaca*, 65 (6) (2015), 1361-1402. (査読有)

(2) Tomoyuki Tanigawa, Existence and asymptotic behavior of strongly monotone solutions of nonlinear differential equations, *Differential Equations and Applications*, 7 (1) (2015), 79-91. (査読有)

(3) J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa, Asymptotic analysis of positive decreasing solutions of a class of systems of second order nonlinear differential equations in the framework of regular variation, *The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 12 (1) (2015), 1-16. (査読有)

(4) J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa, Asymptotic analysis of positive solutions of third order nonlinear differential equations, *Hiroshima Mathematical Journal*, 44 (1) (2014), 1-34. (査読有)

(5) J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa, Existence and precise asymptotics of positive solutions for a class of nonlinear differential equations of the third order, *Georgian Mathematical Journal*, 20 (3) (2013), 493-531. (査読有)

(6) T. Kusano, J. Manojlovic and T. Tanigawa, Existence and asymptotic behavior of positive solutions of fourth order quasilinear differential equations, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 17 (3) (2013), 999-1030. (査読有)

(7) J. Jaros, T. Kusano and T. Tanigawa, Asymptotic analysis of positive solutions of a class of third order nonlinear differential equations in the framework of regular variation, *Mathematische Nachrichten*. 296 (2-3) (2013), 205-223. (査読有)

(8) Tomoyuki Tanigawa, Generalized regularly varying solutions of second order nonlinear differential equations with deviating arguments, *Memoirs on Differential Equations and Mathematical Physics*, 57 (2012), 123-162. (査読有)

(9) T. Kusano, V. Maric and T. Tanigawa, An asymptotic analysis of positive solutions of generalized Thomas-Fermi differential equations - The sub-half-linear case, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 75, (2012), 2474-2485. (査読有)

(10) T. Kusano, J. Manojlovic and T. Tanigawa, Sharp oscillation criteria for a class of fourth order nonlinear differential equations, *The Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 41 (1) (2011), 249-274. (査読有)

[学会発表](計 17 件)

(1) 谷川智幸, 混合型 2 階半分線形関数微分方程式の正値解の存在について, 日本数学会年会(筑波大学第一エリア, 第三エリア), 2016 年 3 月 16 日 ~ 19 日.

(2) Tomoyuki TANIGAWA, Asymptotic behavior of positive solutions of second order half-linear differential equations with deviating arguments of mixed type, *International Workshop on*

the Qualitative Theory of Differential Equations, QUALITDE 2015, Tbilisi, Georgia, December 27-29, 2015.

(3) Tomoyuki TANIGAWA, Existence and asymptotic behavior of strongly monotone solutions of nonlinear differential equations, The Equadiff 2015, Lyon, France, July 6-10, 2015.

(4) Tomoyuki TANIGAWA, Asymptotic analysis of strongly monotone solutions of nonlinear differential equations, Conference on Differential & Differential Equations and Applications, Lisbon, Portugal, May 18-22, 2015.

(5) 谷川智幸, 4階劣半線形微分方程式の正値解の存在について, 日本数学会年会(明治大学駿河台キャンパス), 2015年3月21日~24日.

(6) 谷川智幸, ある4階非線形微分方程式の正則変動関数解の存在について, 常微分方程式ワークショップ(愛媛大学), 2015年3月10日.

(7) 谷川智幸, 正則変動関数論の微分方程式への応用, 第7回半田山微分方程式セミナー(岡山理科大学), 2015年2月24日.

(8) 谷川智幸, 3階 Emden-Fowler 型微分方程式の正値解の漸近挙動について, 日本数学会秋季総合分科会(広島大学東広島キャンパス), 2014年9月25日~28日.

(9) 谷川智幸, Existence of regularly varying solutions with nonzero indices of second order half-linear differential equations with retarded arguments, 振動理論ワークショップ-金沢 2014, 2014年3月9日~10日.

(10) 谷川智幸, ある非線形微分方程式系の正値減少解の漸近挙動について, 第174回 AP Seminar(研究集会「富山解析セミナー 2013」), 2013年10月5日.

(11) 谷川智幸, 進みと遅れの変数を含む2階半線形関数微分方程式の一般化された正則変動関数解の存在について, 日本数学会秋季総合分科会(愛媛大学城北キャンパス), 2013年9月24日~27日.

(12) 谷川智幸, 2階非線形微分方程式系の正値減少解について, 岡山理科大学における微分方程式セミナー(岡山理科大学), 2013年9月9日~10日.

(13) 谷川智幸, 進みと遅れの変数をもつ半線形微分方程式の正則変動関数解について, 日本数学会(京都大学吉田キャンパス), 2013年3月20日~23日.

(14) 谷川智幸, Asymptotic behavior for positive solutions of a class of third order nonlinear differential equations, 振動理論ワークショップ-松山 2013, 2013年2月10日~11日.

(15) 谷川智幸, 微分方程式の解の漸近挙動と Karamata 関数について, 第21回岐阜数理科学セミナー(岐阜大学), 2012年12月18日.

(16) 谷川智幸, 進みと遅れの変数をもつ2階半線形関数微分方程式の正値解について, 愛知教育大学における微分方程式セミナー(愛知教育大学) 2012年9月6日~7日.

(17) Tomoyuki TANIGAWA, Precise asymptotic behavior of positive solutions of generalized Thomas-Fermi differential equations, Research Institute for Mathematical Sciences Conference: Progress in Qualitative Theory of Functional Equations, (Kyoto University), November 9-11, 2011.

## 6. 研究組織

研究代表者

谷川智幸 (TANIGAWA TOMOYUKI)

熊本大学・教育学部・准教授

研究者番号: 10332008