様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２６ 年　　６ 月 １９ 日現在

機関番号：２２６０４
研究種目：基盤研究(C)
研究期間：2011～2013
課題番号：２３５４０２１９
研究課題名（和文）自己共役作用素の特異ランク１摂動に関する散乱逆問題

研究課題名（英文）Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator

研究代表者
吉冨　和志（Yoshitomi, Kazushi）

首都大学東京・理工学研究科・准教授

研究者番号：４０３０４７２９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,500,000円、（間接経費）　　1,050,000円

研究成果の概要（和文）：散乱理論において最も重要な問題の一つとして散乱行列の特徴付けが挙げられる。当該研究では、スペクトルが単純かつ絶対連続な自己共役作用素の特異ランク1摂動の族について、対応する散乱行列の特徴付けを得た。得られた結果を学術雑誌において発表した(K. Yoshitomi, Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator, Asymptotic Analysis 80 (2012), 213-221)。当該研究は点相互作用と密接に関係している。

研究成果の概要（英文）：One of the most important problems in the scattering theory is the characterization of the scattering matrices. This investigation studies forward and inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator A. I obtain necessary and sufficient conditions for a function to be the phase shift of a singular rank-one perturbation of A. This result is closely related with the theory of point interactions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：散乱逆問題　自己共役作用素　特異ランク1摂動

１．研究開始当初の背景

特異ランク 1 摂動は１９６１年に F. Berezin と L. Faddeev によって初めて数学的に厳密に扱われた。彼らはポテンシャルが Dirac のデルタ関数で与えられる 3 次元 Schrödinger 作用素を導入した。この種のポテンシャルは彼らの仕事以降、点相互作用と呼ばれる。この仕事は多くの関心を集め、多岐に渡り発展させられた。特に、1995 年に A. Kiselev と B. Simon により特異ランク 1 摂動を構成する抽象的枠組みが与えられて以来、点相互作用を含めた特異摂動論は飛躍的に発展した。こうした流れの中で、私はこれまで周期的な点相互作用に従う１次元 Schrödinger 作用素および Dirac 作用素のスペクトラルギャップの研究を行ってきた（論文[1,2,3,4]）。一方、Strum-Liouville 作用素の散乱逆問題については、これまでに数多くの研究が成されてきたが、当該研究と特に密接に関連したものとして１９７９年の P. Deift と E. Trubowitz による結果が挙げられる。彼らはポテンシャルが重み付き L^1 空間に属する、1 次元 Schrödinger 作用素の散乱行列の特徴付けを与えた。当該研究は、より特異性の強いポテンシャルに従う 1 次元 Schrödinger 作用素の散乱行列の特徴付けを意図したものである。当該研究はこれらの結果によって動機付けられている。また、私は論文[2]において Hill 型作用素の特異ランク 1 摂動のスペクトルの特徴付けを得ている。この問題はスペクトル逆問題と呼ばれており、当該研究課題と非常に密接に関連している。散乱逆問題およびスペクトル逆問題は現代の線形微分方程式論における中心課題の１つであり、非常に精力的に多くの研究が行われている。

[1] Kazushi Yoshitomi: Dirac Operators with Periodic δ-interactions: Spectral Gaps and Inhomogeneous Diophantine Approximation, Michigan Mathematical Journal 58, 363-384 (2009).

[2] Kazushi Yoshitomi: Inverse Spectral Problems for Singular Rank-One Perturbations of a Hill Operator, Journal of the Australian Mathematical Society 87, 421-428 (2009).

[3] Kazushi Yoshitomi: Spectral Gaps of the Schrödinger Operators with periodic δ'-interactions and Diophantine Approximations, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 143, 185-199 (2007).

[4] Kazushi Yoshitomi: Spectral Gaps of the One-Dimensional Schrödinger Operators with Periodic Point Interactions, Hokkaido Mathematical Journal 35, 365-378 (2006).

２．研究の目的

A を Hilbert 空間 H 上の自己共役作用素とする。H の内積とノルムをそれぞれ$\langle \cdot, \cdot \rangle$と$\| \cdot \|_H$で表す。作用素 A に次の２つの仮定(A.1), (A.2)をおく。

(A.1) A のスペクトルは単純である。

$g \in H$ を A に関する H の生成ベクトルとする。$\{E(\triangle) \mid \triangle \in \mathbf{B}\}$を A に対応する単位の分解とする（ただし、**B** は Borel 集合族を表す）。Borel 測度σ_gを$\sigma_g(\triangle)=\langle g,E(\triangle)g\rangle$で定める。１次元 Lebesgue 測度を m で表し、Borel 測度 m_0 を $m_0(\triangle)=m(\triangle\cap[0,\infty))$で定める。

(A.2) σ_gと m_0 は互いに絶対連続である。

次に、作用素 A の特異ランク１摂動を制限・拡張法により定義する。$s\geq 0$ に対し、$\mathrm{Dom}(A^{s/2})$はノルム

$$\|\psi\|_s=\|(A+1)^{s/2}\psi\|_H$$

に関して Hilbert 空間を成す。この空間を $H_s(A)$で表し、$H_s(A)$の双対空間を $H_{-s}(A)$で表す。また、$H_{-s}(A)\times H_s(A)$上の双対形式を $<\cdot,\cdot>_{-s,s}$で表す。$H_{-s}(A)$-$H_s(A)$のベクトルϕで、正規化条件 $\|(A+i)^{-1}\phi\|_H=1$ を満たすものをとる。A の定義域を$\{\psi\in \mathrm{Dom}(A) \mid <\phi, \psi>_{-2,2}=0\}$に制限したものを $A\sim_\phi$で表す。$A\sim_\phi$は不足指数が(1,1)の閉対称作用素である。$A\sim_\phi$の$\pm i$ における不足部分空間はベクトル $g^\pm_\phi=(A\mp i)^{-1}\phi$で張られる。実数$\gamma$に対し、$m(\gamma)=(\gamma+i)/(\gamma-i)$とおく。
$(A\sim\phi)^*$の定義域を

$$\{u-cm(\gamma)\, g^+_\phi+c\, g^-_\phi \mid u\in \mathrm{Dom}(A\sim_\phi),\ c\in \mathbf{C}\}$$

に制限したものを $A_{\phi,\gamma}$で表す。$A_{\phi,\gamma}$は$A\sim_\phi$の自己共役拡張である。$A_{\phi,\gamma}$を A の特異ランク 1 摂動と呼ぶ。次に、散乱行列を定義する。波動作用素と散乱作用素をそれぞれ

$$W_\pm(\phi,\gamma) = \text{s-lim}_{t\to\pm\infty}\exp(it\, A_{\phi,\gamma})\exp(-itA),$$

$$S(\phi,\gamma)=W_+(\phi,\gamma)^*\, W_-(\phi,\gamma)$$

で定義する。A に関する H の生成ベクトル h を固定する。作用素 $U_h:L^2(\mathbf{R},d\sigma_h)\to H$ を

$$U_h g=\int_{\mathbf{R}} g(\lambda)dE(\lambda)h$$

で定義する。U_h はユニタリー作用素である。$(A+i)^{-1}\phi$が A に関する生成ベクトルであるならば、$U_h^*\, S(\phi,\gamma)\, U_h$ は掛け算作用素である。この掛け算作用素の表象を $T(\phi,\gamma)$と表し、散乱行列と呼ぶ。本研究の目的は散乱行列の特徴付けを得ること、すなわち、与えられた関数 f があるベクトルϕと実数γを用いて $f=T(\phi,\gamma)$と表される為の必要十分条件を得ることである。

３．研究の方法

充実した研究成果を得る為には，当該研究に深く関連した国内外の最新の研究結果についての情報収集が必要不可欠である．本研究では「当該研究に関連した単行本・研究集会報告集の購入」及び「当該研究に関連した国内のセミナー・シンポジウム・研究集会へ参加」により情報収集を行った。研究のさらなる推進の為には，研究集会・シンポジウムに参加し，研究発表を行うことが重要である．また，シンポジウムの参加者と研究結果についての議論を行い，当該研究に還元させることが必要である．本研究では研究目的の近いセミナーに参加し，研究成果の発表を行った．

４．研究成果

$v\in H_{-2}(A)$に対し，

$$\rho_v(\lambda)=<((A+\mathbf{i})^{-1}v,\ E(\lambda)(A+\mathbf{i})^{-1}v>$$

とおく．散乱行列は散乱位相シフト $0\leqq\Theta_{\phi,\gamma}(\lambda)\leqq\pi$を用いて

$$T(\phi,\gamma)=\exp(-2i\Theta_{\phi,\gamma}(\lambda))$$

と表される．次の 4 条件を満たす対$(\phi,\gamma)\in(H_{-2}(A)-H_{-1}(A))\times\mathbf{R}$の集合を S で表す:

$$\|(A+i)^{-1}\phi\|_H=1;$$
$$\lambda>0 \text{ に対し } \rho_\phi{}'(\lambda)>0;$$
$$\rho_\phi\in C^\infty(\mathbf{R});$$
$$-\gamma+\int_{[0,\infty]}t^{-1}d\rho_\phi(t)<0.$$

散乱位相シフトの特徴付けに関する次の結果が得られた:

定理． $\mathbf{R}$ 上の実数値関数 p が与えられているとする．S に属する対(ϕ,γ)が存在して，$\Theta_{\phi,\gamma}(x)=\pi-p$ が成り立つ為の必要十分条件は，$p\in C^\infty(\mathbf{R})$，$x\leqq0$ に対し $p(x)=0$，$x>0$ に対し $0<p(x)<\pi$，$\int_{[1,\infty]}p(x)/x\,dx=\infty$，かつ$\int_{[1,\infty]}(\pi-p(x))/x\,dx=\infty$ が成り立つことである．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① <u>Kazushi Yoshitomi</u>, Inverse scattering problems for singular rank-one perturbations of a selfadjoint operator, Asymptotic Analysis 80 (2012), 213-221.

② <u>Kazushi Yoshitomi</u>, A remark on double

singular integrals, Kyushu Journal of Mathematics 66 (2012), 429-433.

〔学会発表〕（計 2 件）

① 吉冨和志, A uniform coerciveness result for biharmonic operator and its application to a parabolic equation, **月曜解析セミナー**, **北海道大学**, 2013 年 10 月 28 日.

② 吉冨和志, A uniform coerciveness result for biharmonic operator and its application to a parabolic equation, **数理工学数学談話会**, **大阪府立大学**, 2013 年 12 月 6 日.

〔図書〕（計 0 件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計 0 件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等　　該当なし

６．研究組織
(1)研究代表者
吉冨和志（YOSHITOMI, Kazushi）
首都大学東京・大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：40304729

(2)研究分担者
該当なし　　(　　　)

研究者番号：

(3)連携研究者
該当なし　　(　　　)

研究者番号：