

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 6 日現在

機関番号：32666

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540222

研究課題名(和文) 外部領域におけるヘルムホルツ方程式のリゾルベント評価とその散乱問題への応用

研究課題名(英文) Resolvent estimates for Helmholtz equations in an exterior domain and their applications to scattering problems

研究代表者

中澤 秀夫 (NAKAZAWA, Hideo)

日本医科大学・医学部・教授

研究者番号：80383371

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,200,000円、(間接経費) 960,000円

研究成果の概要(和文)：古典物理学における波動方程式や量子力学におけるシュレディンガー方程式の定常問題であるヘルムホルツ方程式を外部領域において考察し、散乱問題において重要となる一様リゾルベント評価式を空間2次元の場合も含めて確立し、その応用として対応する非定常問題の解の評価である平滑化評価式を導いた。特に2次元の場合には従来負となり評価の出来なかった項を、放射条件に関連するHardy型の不等式を巧妙に用いることにより、評価することが出来ることが判明した。この結果として、3次元以上の場合に成立することがすでに証明されていた一様リゾルベント評価式を2次元の場合にも導くことに成功した。

研究成果の概要(英文)：We studied the Helmholtz equation, which is appeared in classical physics as wave equations, and in quantum mechanics as Schrödinger equations. We established the uniform resolvent estimate including the case of a two-dimensional, which is important in the scattering problem, corresponding as the application. In particular, in 2-D case, we find that we can compensate the term which remain negative term using the Hardy type inequalities related to radiation conditions. As a result, we can prove the uniform resolvent estimate in 2D case, which was already proved in $N(\geq 3)$ D case.

研究分野：数学

科研費の分科・細目：基礎解析学

キーワード：偏微分方程式論 数学的散乱理論 スペクトル解析 リゾルベント評価 極限吸収の原理 極限振幅の原理

1. 研究開始当初の背景

数学の中の基礎解析学の分野の一つとして偏微分方程式論・数学的散乱理論という研究分野がある。この分野では、古典物理学や量子力学等に現れる数学的対象である偏微分方程式の数学的に厳密な取り扱いが 1940 年代の加藤敏夫教授以来、古くから研究対象とされ、これまでに世界各国の多くの研究者によって種々の顕著な結果が得られてきた。古典的な波動方程式や量子力学におけるシュレディンガー方程式の定常問題はどちらもヘルムホルツ方程式といわれる定数係数 2 階線形楕円型偏微分方程式に帰着される。この方程式の解の評価として重要なのが、リゾルベント評価式である。これは散乱の定常理論を展開する上で最も基本的な不等式であり、極限吸収原理の証明の際に重要な役割を果たし、それが示されればスペクトルの絶対連続性や波動作用素、散乱作用素の存在等、散乱理論の構成が可能となる。さて、リゾルベント評価式に関し、全空間の場合にはフーリエ変換が使えることからこれまで多くの研究者により精密な結果が得られてきた。池部-斉藤(1972)や Agmon(1975)、黒田成俊(1978)等によりヘルムホルツ方程式を含むより一般の定常シュレディンガー方程式に対するリゾルベント評価式が証明され、1989 年には加藤-谷島により全空間 3 次元以上で一樣リゾルベント評価式が初めて証明され、その応用として対応する時間依存発展方程式に対する解の平滑化評価式が証明された。これは非線形問題への応用などの際に重要な役割を果たす。さて問題を 2 次元以上の外部領域におけるリゾルベント評価に置き換えてみると、フーリエ変換が使えないことなどから、全空間の場合に得られていて当然その成立が期待されるリゾルベント評価式の証明はあまり進んでいなかった。1972 年に望月清により 3 次元以上の外部領域の場合のスペクトル散乱理論が確立されたものの、その後本質的な進展はあまりなかった。が、ついに 2010 年に望月清が 3 次元以上外部領域の場合で、磁場付きシュレディンガー作用素に対して一樣リゾルベント評価式を証明する。しかし 2 次元外部領域の場合には、同様の手法で評価しようとしても負となり残る項を評価できず、その故に一樣リゾルベント評価式はこれまで証明されていなかった。

2. 研究の目的

本研究の目的はこれまで未解明であった 2 次元外部領域におけるヘルムホルツ方程式を含む摩擦項を伴う波動方程式の定常問題に対する一樣リゾルベント評価式を証明し、それを散乱問題の研究に応用することである。

3. 研究の方法

既存の研究論文の方法を私がこれまで培った方法と併せることで、また新たな不等式

を確立することで未解明の事柄を証明することに成功した。具体的には、2010 年の望月清の論文の中で導かれている放射条件に関連する Hardy 型の不等式にパラメータを入れたものを用い、不等式に現れる項を制御するためにそのパラメータをうまく選ぶ。するとこれまで負となって評価することがどうにもできなかった項をうまく補うことが出来ることに気が付いた。

4. 研究成果

2 次元外部領域におけるヘルムホルツ方程式の一樣リゾルベント評価式を確立することが出来た。またこの応用として、対応する非定常問題の解に対する平滑化評価式を空間 2 次元の場合に証明することが出来た。更に、1966 年に溝畑-望月により証明されて以来何の進展もなかった摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理を 2 次元以上の外部領域の場合に拡張することに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 2 件)

・ Hideo Nakazawa, Uniform resolvent estimates for Schrödinger equations in an exterior domain in \mathbb{R}^2 and their applications to scattering problems, Bull. Lib. Arts & Sci. Nippon Med. Sch., No. 42, pp.1-12 (2013, 9)

・ 中澤秀夫, 摩擦項を伴う波動方程式に関する注意 Seminar Notes of Mathematical Sciences 14, pp.64-73, (2013.4)

[学会発表](計 18 件)

・平成 22 年(2010)8 月 11 日(水) OTAMP 2010 (Research and Conference Center, Będlewo, Poland) にて「Several Topics on Wave Equations with Dissipations」

・平成 22 年(2010)10 月 2 日(土) 学習院大学解析学研究セミナー - 計量を持つ多様体上の微分方程式 - にて「2 次元外部領域における HELMHOLTZ 方程式の RESOLVENT 評価とその応用」

・平成 22 年(2010)10 月 9 日(土) 新潟偏微分方程式研究集会にて「2 次元外部領域における HELMHOLTZ 方程式の RESOLVENT 評価とその応用」

・平成 22 年(2010)10 月 27 日(水) 三大学偏微分方程式セミナー(国士館)にて「2 次元外部領域におけるヘルムホルツ方程式のリゾルベント評価とその応用」

・平成 22 年(2010)11 月 27 日(土) 愛媛大学解析セミナーにて「放射条件に関連する Hardy 型不等式と 2 次元外部領域における Helmholtz 方程式の一樣 resolvent 評価」

・2011 年 9 月 27 日(火)数理科学セミナー(信州松本偏微分方程式セミナーとの共催)にて「摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理について」

・平成 23 年(2011)9 月 30 日(金)日本数学会秋季総合分科会函数方程式論分科会にて「放射条件に関連する Hardy 型不等式と 2 次元外部領域における Helmholtz 方程式の resolvent 評価」

・平成 23 年(2011)11 月 19 日(土)第 85 回熊本大学応用解析セミナーにて「ヘルムホルツ方程式の外部問題に対する一樣リゾルベント評価とその散乱問題への応用」

・平成 23 年(2011)11 月 26 日(土)解析学研究セミナー(学習院大学理)にて「Poincare 及び Hardy の不等式」

・平成 24 年(2012)年 1 月 5 日(木)第 27 回松山キャンパス(山口大学理学部)にて「摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理について」

・平成 24 年(2012)1 月 11 日(水)三大学偏微分方程式セミナー(中大)にて「摩擦項を伴う波動方程式に対する極限振幅の原理」

・平成 24 年(2012)3 月 9 日(金)発展方程式シンポジウム(東海大学理学部)にて「外部領域における Helmholtz 方程式のレゾルベント評価と摩擦項を伴う波動方程式の極限振幅の原理」

・平成 24 年(2012)6 月 8 日(金) 広島数理解析セミナー第 159 回(16:30-17:30, 広島大学理学部 B707)にて「2 次元外部領域におけるヘルムホルツ方程式のリゾルベント評価とその応用」

・平成 24 年(2012)12 月 26 日(水) TAIWAN-JAPAN Joint Conference on PDE and Analysis(Room 937 Astro-Math. Building, NTU, Sec. 4, Roosevelt Road, Taipei 10617, TAIWAN)にて「On the wave equation with dissipation」

・平成 25 年(2013)3 月 12 日(火) The 5th Nagoya Workshop on Differential Equations, (14:00-14:50, 名古屋大学 多元数理科学棟 509 号室)「Uniform resolvent estimates for stationary Schrödinger equations in a two-dimensional exterior

domain and their applications」

・平成 25 年(2013)9 月 7 日(土) 日本医科大学医学会総会新任教授特別講演(日本医科大学橋桜会館 2 階橋桜ホール)にて「波動方程式に対する数学的散乱理論」

・平成 26 年(2014)3 月 15 日(土)、日本数学会春季総合分科会、函数方程式論分科会(学習院大学)にて「2 次元外部領域における磁場付き Schrödinger 作用素に対する一樣リゾルベント評価」

・平成 26(2014)年 5 月 30 日(金)、京都大学数理解析研究所 RIMS 共同研究「保存則を持つ偏微分方程式の解の正則性・特異性の研究」にて「Uniform resolvent estimates for Helmholtz equations in 2D exterior domain and their applications」

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中澤 秀夫 (NAKAZAWA Hideo)
日本医科大学医学部・教授
研究者番号：80383371

(2) 研究分担者

・門脇 光輝 (KADOWAKI Mitsuteru)
愛媛大学大学院理工学研究科・准教授
研究者番号：70300548

・渡邊 一雄 (WATANABE Kazuo)
学習院大学理学部・助教

研究者番号：90260851

(3)連携研究者
()

研究者番号：