2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費 KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２９ 年　 ５ 月 ２５ 日現在

機関番号：３２６６５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2016
課題番号：２３５４０２２５
研究課題名（和文）発散形楕円型作用素の理論と応用

研究課題名（英文）Theory and application of divergence form elliptic operators

研究代表者
宮崎　洋一（MIYAZAKI, Yoichi）

日本大学・歯学部・教授

研究者番号：１０２１９７６９

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,300,000円

研究成果の概要（和文）：発散形および非発散形の強楕円型作用素をディリクレ境界条件の下で考え，この作用素がLpソボレフ空間の間の同型写像を与えることを示した。先行結果と比べると，係数と領域の境界に関する滑らかさの条件を究極まで弱めたことに意義がある。この系として，楕円型偏微分方程式の解が，係数および領域の境界の滑らかさに応じて滑らかになるという正則性定理を従来の仮定よりも弱い条件の下で導いた。類似の結果が古典的な微分可能性と関連するヘルダー連続な関数空間の枠組みでも成り立つことを示した。

研究成果の概要（英文）：This research is concerned with strongly ellptic operators in divergence or non-divergence form under Dirichlet boundary conditions. We showed that the operators are isomorphisms between suitable two Lp Sobolev spaces. Compared with previous studies, this research obtained the same conclusion under much weaker assumptions. As a corollary, we derived a regularity theorem for elliptic equations, which states that the solutions become smoother as the coefficients and the boundary of the domain become smoother. A similar result was also shown in the framework of the Hoelder spaces, which are related to classical differentiability.

研究分野：偏微分方程式論

キーワード：elliptic operator　regularity theorem　Sobolev space　Hoelder-Zygmund space　Dirichlet condition　eigenfunction　asymptotic behavior

１．研究開始当初の背景

楕円型方程式は，古くから多くの研究がなされているが，非発散形に比べ発散形の楕円型方程式に関しては未解明の部分が多かった。発散形に対しては，ゴールディングの不等式とラックス・ミルグラムの定理を利用することにより，ヒルベルト空間である L_2 空間の枠内では解の存在と一意性が示されていたものの，L_p 空間の枠内での結果はあまり進展していなかった。この方面に関しては，本研究を始める数年前に，係数が一様連続なときに，レゾルベントの方法とノイマン級数の方法により，楕円型作用素に対する逆作用素が構成されていた。すなわち，L_p 空間の枠内で考えても，解の存在と一意性が示せていた。しかし，係数が滑らかな場合にこの結果に対応する定理はまだ証明されていなかった。言い換えると，係数の滑らかさに応じて解も滑らかさを増すという，楕円型方程式の正則性定理は L_2 空間の枠内ではよく知られた結果ではあるが，L_p 空間の枠内で扱った文献はほとんどなかった。古典的な微分可能性に関連した空間であるヘルダー・ジムグンド空間で考えた場合も同様の状態であった。

また，楕円型作用素の固有関数から定まるスペクトル関数の境界微分は，それらの固有値と密接な関係があり，その漸近挙動は固有値の漸近挙動と類似の公式を満たすことが知られていた。得られている漸近公式は，主要部が１項だけの単純な形をしたものであるが，熱核の応用から主要部が２項からなるより精密な公式が予想されており，この予想は未解決のままであった。

２．研究の目的

発散形および非発散形の楕円型作用素に対して，ディリクレ境界条件の下で，L_2 空間の枠内で成立することが知られている正則性定理を L_p 空間の枠内で導く。ここでは，係数の滑らかさと楕円型作用素が定義されている領域の境界の滑らかさを表す指数について着目し，その指数の分だけ方程式の解も滑らかになることを示す。同時に，境界の滑らかさに関しては，L_2 空間や楕円型作用素の階数が２の場合に知られている滑らかさよりも弱い条件下で導く。これをソボレフ空間により定式化すると，楕円型作用素の逆作用素が階数 k のソボレフ空間から階数 $(k+2m)$ のソボレフ空間への有界線形作用素として構成できると表現できる。

同様の考察をソボレフ空間以外の関数空間に対しても行う。とくに，ヘルダー・ジグムンド空間やベソフ空間を対象とする。

楕円型作用素に対応するスペクトル関数の境界微分の漸近挙動について，既に得られている単純な形の漸近公式の改良を行い，予想されている漸近公式の導出に取り組む。この公式ではディリクレ境界条件が課されているが，代わりにノイマン境界条件を課したらどうなるかを考察する。

３．研究の方法

(1) 定数係数の $2m$ 階の楕円型作用素を n 次元の全空間において考え，フーリエ掛算作用素の有界性に関するミフリンの定理により，逆作用素であるレゾルベントを構成するとともに，その作用素ノルムを評価する。このレゾルベントは $(k-m)$ 階のソボレフ空間から $(k+m)$ 階のソボレフ空間への有界線形作用素となる。ただし，k は０以上の整数とする。

(2) ディリクレ境界条件を課して，(1)と同様のことを n 次元の半空間に対して行う。レゾルベントの構成では，$(n-1)$ 次元のフーリエ掛算作用素の１次元積分として表現されるポアッソン積分が出現するので，ミフリンの定理とハーディの不等式によりこの積分の有界性を示す。

(3) 変数係数の楕円型作用素に対して，１の分解と(2)で構成した定数係数の場合のレゾルベントを用いて，まずパラメトリックスを構成する。パラメトリックスの満たす不等式を導いた後，スケーリング変換により，スペクトル・パラメータの絶対値が十分大きなときに，パラメトリックスからレゾルベントが構成されることを示す。このとき，ソボレフ空間には通常のノルムの代わりに，スペクトル・パラメータに依存するノルムを導入することが重要である。

(4) 特殊リプシッツ領域へ(3)の結果を適用するために，半空間と特殊リプシッツ領域の間に微分同相な写像を構成する。この写像により，特殊リプシッツ領域で定義された楕円型作用素は，半空間へ移すと，半空間における楕円型作用素を少し摂動させた作用素として表すことができる。この事実に着目して，ノイマン級数の方法でレゾルベントを構成する。

(5) 上記の手順と同様にして，ヘルダー空間に対しても行う。ただし，ヘルダー空間の階数は自然数以外のものとする。ヘルダー空間では，微分階数に対応するセミノルムの他に，ヘルダー連続に対応するセミノルムの評価も必要となり，ソボレフ空間の場合よりも手間が増える。

(6) スペクトル関数の境界微分を評価するには，変数係数の作用素を定数係数の作用素で近似したときのズレを，レゾルベント方程式と(1)から(4)で行ったノルム評価から正確に見積もり，半空間における定数係数の作用素のスペクトル関数を調べることへと帰着させる。とくに，領域が円板や球の場合にはスペクトル関数は，ベッセル関数を用いて具体的に表すことができるので，領域の対称性に着目して，漸近公式を導き出す。

４．研究成果

(1) 発散形の 2m 階の強楕円型作用素を C^{k+1} 級の滑らかさの境界をもつ領域で考え，ディリクレ境界条件を課す。また，係数については C^k 級の滑らかさを仮定する。このとき，スペクトル・パラメータがある各領域に入り，絶対値がある定数よりも大きいならば，楕円型作用素は L_p ソボレフ空間の間の同型写像であるという定理を得た。ここで，ソボレフ空間の階数は k+m と k-m であり，k は自然数である。この系として，L_p 空間に対する正則性定理を得た。従来の結果と比べ，境界の滑らかさに関する指数を(m-1)だけ少なくしてもよい，という点で格段に改良された結果になっている。

(2) 非発散形の強楕円型作用素に対しても，(1)と類似の定理が成り立つことを証明した。すなわち，領域の境界が C^{k+m+1} で係数が C^k 級という仮定の下で，階数が k+2m と k のソボレフ空間が同型になるという定理を得た。

(3) ヘルダー空間に対しても，発散形および非発散形の両方について，(1)，(2)と類似の結果を得た。ただし，ヘルダー空間の指数が自然数である場合を除く。(1),(2),(3)の応用として，グリーン関数，つまりレゾルベント核や熱核（半群の積分核）の滑らかさを示し，それらの導関数の評価も行った。その証明の中で，グリーン関数の評価をレゾルベント核から直接導く方法を開発した。

(4) 全空間で有界な調和関数は定数である，というリウビルの定理を一般の定数係数の楕円型作用素へと拡張した定理に対して，熱核を利用する新たな証明法を考案した。従来の方法では，超函数の意味の解が滑らかであることを示す部分と，定数であることを論ずる部分とに分離して証明を行うが，本研究での方法は，これら２つの部分を熱核との合成積を考えることにより統合したことが特徴的である。物理的な視点から見ると，十分時間が経過した系では平衡状態に達し熱の出入りがなくなるという事実を反映した証明になっている。

(5) 楕円型作用素がラプラシアンで，領域が円板または球という特別な場合に，ディリクレ境界条件を初等的な方法で解けることを示した。また，ソボレフ空間におけるトレース定理を半空間の場合へと帰着させることなく，円板や球に対して直接証明する方法を考案した。

(6) ラプラシアンの固有関数からなるスペクトル関数に対して，境界微分の漸近挙動を与える公式の改良を行った。従来得られていた漸近公式では剰余項の評価が，指数 0 に対するスモール・オーダーであったが，本研究では剰余項の指数を 1/2 だけ小さくできた。予想されている漸近公式の剰余項では指数が 1 なので，予想に向かって 50%前進したことになる。また，領域が球の場合には予想を解決した。言い換えると，主要部が 2 項からなる漸近公式を得た。第 1 項には領域の体積，第 2 項には領域の境界の面積が現れることから，固有値の漸近公式と並んで幾何学的に興味深い結果である。

(7) 楕円型作用素の研究で必要となるソボレフ空間について，従来のアプローチの仕方とは異なる視点から考察を行った。村松の第 1 積分公式と呼ばれる公式を駆使することにより，ソボレフ空間における主要な定理を統一的な観点から証明した。伝統的な手法では，一つ一つの定理はそれぞれ別々な方法を用いて証明がなされていたが，本研究では村松の積分公式にソボレフ空間論における中心的な役割を演じさせることにより，すべての定理を一つの道具だけで証明している点が特徴的である。この方法で扱った話題は，補間不等式，ソボレフの埋蔵定理，トレース定理，拡張定理，ソボレフ空間の複素補間，ソボレフ空間の実補間，負べきのソボレフ空間である。応用として，楕円型方程式の正則性定理の証明で必要となる補題の簡明な証明を与えた。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　9 件）

1. Y. Miyazaki, Introduction to Lp Sobolev spaces via Muramatu's integral formula, Milan J. Math.，査読有，85，2017，103-148 DOI:10.1007/s00032-017-0267-8

2. Y. Miyazaki, Boundary behavior of Dirichlet eigenfunctions for a ball，日本大学歯学部紀要，査読無，44，2016，65-68

3. Y. Miyazaki, Sobolev trace theorem and the Dirichlet problem in a ball, Int. Journal of Math. Analysis，査読有，10，2016，1173-1188 DOI:10.12988/ijma.2016.6899

4. Y. Miyazaki, Liouville's theorem and heat kernels, Expo. Math.，査読有，33，2015，101-104 DOI:10.1016/j.exmath.2014.02.001

5. Y. Miyazaki, Sobolev trace theorem and the Dirichlet problem in the unit disk, Milan J. Math.，査読有，82，2014，297-312 DOI:10.1007/s00032-014-0222-x

6. Y. Miyazaki, Another method to evaluate Green functions for elliptic equations,

Int. Journal of Math. Analysis, 査読有, 8, 2014, 1151-1159
DOI:10.12988/ijma.2014.44107

7. Y. Miyazaki, Schauder theory for Dirichlet elliptic operators in divergence form, J. Evol. Equ., 査読有, 13, 2013, 443-480
DOI:10.1007/s00028-013-0186-2

8. Y. Miyazaki, Asymptotic behavior of normal derivatives of eigenfunctions for the Dirichlet Laplacian, J. Math. Anal. Appl., 査読有, 388, 2012, 205-218
DOI:10.1016/j.jmaa.2011.11.017

9. Y. Miyazaki, Norm estimates and integral kernel estimates for bounded operators in Sobolev spaces, Proc. Japan Acad. Ser. A, 査読有, 87, 10, 2011, 186-191
DOI:10.3792/pjaa.87.186

〔学会発表〕（計 7件）
1. Y. Miyazaki, Ho”lder regularity for elliptic equations in a non-smooth domain, 2014/08/25-2014/08/27, Sapporo Symposium on Partial Differential Equations (satelite conference of Seoul ICM 2014), 北海道大学（北海道札幌市）

2. 宮崎洋一, 楕円型方程式の正則性定理と領域の滑らかさ, 2014/05/27, 解析学火曜セミナー（招待講演）, 東京大学数理科学研究科（東京都目黒区）

3. 宮崎洋一, ソボレフ空間の複素補間の入門的考察, 2014/03/17, 日本数学会 2014 年会 実函数論分科会, 学習院大学（東京都豊島区）

4. 宮崎洋一, 楕円型方程式の Lp 正則性定理と領域の滑らかさ, 2013/03/21, 日本数学会年会, 函数方程式論分科会, 京都大学（京都府京都市）

5. 宮崎洋一, 楕円型作用素のレゾルベント核の評価法, 2012/09/21, 日本数学会秋季総合分科会, 実函数論分科会, 九州大学（福岡県福岡市）

6. 宮崎洋一, 発散形楕円型作用素のシャウダー理論, 2011/09/28, 日本数学会秋季総合分科会, 函数方程式論分科会, 信州大学（長野県松本市）

7. 宮崎洋一, Heat asymptotics for Dirichlet elliptic operators, 2011/06/25, 神楽坂解析セミナー（招待講演）, 東京理科大学（東京都新宿区）

６．研究組織
(1)研究代表者

宮崎　洋一（MIYAZAKI, Yoichi）
日本大学・歯学部・教授
研究者番号：10219769