

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 27 年 6 月 20 日現在

機関番号：34315

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2014

課題番号：23540226

研究課題名(和文)ディラック作用素のスペクトルとレゾナンスの研究

研究課題名(英文)Research on the spectrum and the resonance of Dirac operators

研究代表者

山田 修宣 (Yamada, Osanobu)

立命館大学・理工学部・教授

研究者番号：70066744

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,800,000円

研究成果の概要(和文)：ディラック作用素の、スペクトルとレゾナンスについて研究した。特に、(1) ポテンシャルが無限遠で発散する場合のスペクトル集中と非相対論的極限、(2) 多体問題のスペクトルの構造、(3) 質量項がない場合のゼロ固有値の非存在定理などについて研究した。(1) については愛媛大学の伊藤宏氏、(2)、(3) については京都大学の太田治隆氏およびミュンヘン大学の Hubert Kalf 氏との共同研究を行い、それぞれについて一定の成果を得ることができた。

研究成果の概要(英文)：We have studied the spectrum and the resonance of Dirac operators, especially (1) the spectral concentration and the non-relativistic limit for potentials infinite at infinity, (2) the spectral structure of many-body Dirac operators, (3) the non-existence of zero eigenvalue for the massless case. We could give our some results for these problems by the corabolation with Hiroshi Ito of Ehime University for (1) and with Takshi Okaji of Kyoto University and Hubert Kalf of Munich University for (2), (3).

研究分野：微分作用素のスペクトル理論

キーワード：ディラック作用素 スペクトル理論 レゾナンス 固有値問題

1. 研究開始当初の背景

研究代表者は40年以上にわたり Dirac 作用素のスペクトル論の研究に携わってきているが、最近では、大鍛治隆司(京都大学・連携研究者), Hubert Kalf (ミュンヘン大学) 両氏と「連続スペクトル内の固有値の非存在の研究」の論文(Nachr., 59 (2003), 19-41) を著した。また伊藤宏氏(愛媛大学・連携研究者)と「遠方で発散するポテンシャルを持つ場合のスペクトル集中と非相対論的極限の研究」として, Ito-Yamada の論文(Proc. Japan Acad. Ser. A, 10 (2005), 157-161) を発表し, さらに研究の発展を目指していた。

2. 研究の目的

Dirac 作用素のスペクトル理論は幅が広く, 簡単には書けないが研究代表者の周辺では次のような問題を対象としている。

- (1) 本質的自己共役性のためのポテンシャルの十分条件
- (2) 連続スペクトルに埋め込まれた固有値の非存在
- (3) 連続スペクトルが絶対連続になるための条件
- (4) 多体 Dirac 方程式について(1)から(3)の問題を考えること
- (5) ブラックホール問題に現れる Dirac 方程式について(1)から(3)の問題
- (6) ポテンシャルが遠方で発散する場合の Dirac 作用素のレゾナンスの非相対論的極限などである。

3. 研究の方法

連携研究者の大鍛治隆司氏, 伊藤宏氏と機会を見つけては会い, 共同研究を行った。関係する研究集会, セミナーに出席し, 研究情報を集めて研究交流を行った。

特に, 定例の作用素論セミナー(京都大学数理解析研究所), 夏の作用素論シンポジウム(代表: 岩塚明氏), 研究集会「超局所解析と古典解析」(代表: 大鍛治隆司氏) などに出席し研究発表を行った。また, 2013年11月の研究集会「超局所解析と古典解析」は, Hubert Kalf 氏ほか, イタリアからも3人の数学者を招くことができ盛会であった。2012年3月の日本数学会の年会(東京理科大)では一般講演を行った。2012年夏には, イギリス・ケンブリッジのニュートン研究所で開かれた共同研究集会

"Spectral Theory of Relativistic Operators" <https://www.newton.ac.uk/event/sro> に出席する機会を得て, 参加者と研究情報の交換および H. Kalf 氏と共同研究を行った。2014年9月にはミュンヘン大学を訪問し, Hubert Kalf 氏と共同研究を行うことができた。

研究分担者の藤家雪朗, 渡部拓也両氏からは,

研究課題に関して有益な示唆を受けることができた。

研究を進めるに当たり, 必要な文献を本資金によって揃えることができた。

4. 研究成果

下記の「主な発表論文等」の中から研究代表者の関わった問題の論文を現在から過去に遡って解説したい。

Kalf-Okaji-Yamada [1] では, Dirac 作用素の質量項 m_0 が正の場合の $\pm m_0$ が固有値でないためのポテンシャルの十分条件, $m_0=0$ の場合の $=0$ が固有値でないための十分条件を与えて証明した。ここでは, Kalf-Okaji-Yamada の以前の論文

Kalf-Okaji-Yamada, Absence of eigenvalues of Dirac operators with potentials diverging at infinity, Math. Nachr., 59 (2003), 19-41

の手法が用いられた。

Kalf-Hubert-Okaji [2] は, J. Dereziński 氏が IAMP の News Bulletin に投稿した Dirac 方程式の三体問題に対する問題提起にひとつの解答を与えたものである。

Yamada [5] では, 研究代表者の学位論文

O. Yamada, Spectral theory of magnetic Schrödinger operators with exploding potentials, J. Math. Kyoto Univ., 30 (1990), 585-623

の極限吸収原理に対する条件 $0 < \alpha < 2$ を改良して, $\alpha = 2$ を含めることに成功した。

Ito-Yamada [10] では, Ito-Yamada の以前の論文

Ito-Yamada, A note on the nonrelativistic limit of Dirac operators and spectral concentration, Proc. Japan Acad. Ser. A, Math. Sci., 81 (2005), 157-161.

の結果を Fourier 解析の手法によってその評価の精密化を行ったものである。

Kalf-Okaji-Yamada [11] では, Dirac 作用素の本質的自己共役性はポテンシャルの局所的条件にのみ依存して大局性には依存しないことが分かっていたが, この性質が変則的磁場モーメントの場合にも成り立つことを証明した。

なお, 伊藤宏と山田修宣は, 雑誌「数学」から執筆依頼のあった「論説」として,

「ディラック作用素のスペクトルについて—ポテンシャルが遠方で発散する場合を中心に—」

を作成して, 2015年2月に投稿した。

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 13 件)

[1] Kalf, Hubert; Takashi Okaji; Yamada, Osanobu; The Dirac operator with mass $m_0 = 0$; Non-existence of zero modes and of threshold eigenvalues, Documenta Mathematica, 20 (2015), 93-120. (査読あり)

[2] Kalf, Hubert; Takashi Okaji; Yamada, Osanobu; Spectral problems about many-body Dirac operators mentioned by Dereziński, arXiv, 1403 (2014), 1-17 (Web Journal ・ 査読なし)
<http://arxiv.org/pdf/1403.6900.pdf>

[3] Takashi Okaji, Spectral problems about many-body Dirac operators mentioned by Dereziński, 京都大学数理解析研究所講究録, 1891, 2014, 93-115. (査読なし)

[4] Bony, Jean-Francois; Fujiie, Setsuro; Ramond, Thierry; Zerzeri, Maher, Width of resonances created by homoclinic orbits-isotropic fixed point case. Spectral and scattering theory and related topics, RIMS, Kokyuroku Bessatsu, B45, Res. Inst. Math. Sci. 2014, 31-43. (査読あり)

[5] Yamada, Osanobu; A remark on the limiting absorption principle of Schroedinger operators with exploding potentials. Mem. Inst. Sci. Engrg. Ritsumeikan Univ. 72 (2014), 1-7. (査読なし)

[6] Fujiie, Setsuro; Lahmar-Benbernou, Amina; Martinez, Andre Semiclassical complex interactions at a non-analytic turning point. Exact WKB analysis and microlocal analysis, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B37, Res. Inst. Math. Sci. (RIMS), Kyoto, 2013, 31-47, (査読あり)

[7] Watanabe, Takuya; Urabe, Jiichiroh Characterization of PDE reducible to ODE under a certain homogeneity and applications to singular Cauchy problems. Funkcial. Ekvac. 56 (2013), 225-247. (査読あり)

[8] Watanabe, Takuya; Urabe, Jiichiroh Singularities of solutions of the Fuchsian Cauchy problem with ramified data. J. Math. Anal. Appl. 406(2013), 86-100 (査読あり)
10.1016/j.jmaa.2013.04.049

[9] Watanabe, Takuya; Zerzeri, Maher Transition probability for multiple

avoided crossings with a small gap through an exact WKB method and a microlocal approach. C. R. Math. Acad. Sci. Paris 350(2012), 841-844. (査読あり)

[10] Ito, Hiroshi ; Yamada, Osanobu; Relativistic Hamiltonians with dilation analytic potentials diverging at infinity. J. Math. Soc. Japan, 63(2011), 1311-1357. (査読あり)

[11] Kalf, Hubert; Okaji, Takashi; Yamada, Osanobu ; A note on the essential selfadjointness of Dirac operators with an anomalous magnetic moment. Mem. Inst. Sci. Engrg. Ritsumeikan Univ. 69(2011), 1-5. (査読なし)

[12] Bony, Jean-Francois; Fujiie, Setsuro; Ramond, Thierry; Zerzeri, Maher Spectral projection, residue of the scattering amplitude and Schroedinger group expansion for barrier-top resonances. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 61 (2011), 1351-1406. (査読あり)

[13] Fujiie, Setsuro; Lahmar-Benbernou, Amina; Martinez, Andre Width of shape resonances for non globally analytic potentials. J. Math. Soc. Japan, 63 (2011), 1-78. (査読あり)

〔学会発表〕(計 15 件)

[1] 山田修宣, Uniform resolvent estimates of Dirac operators, 第 21 回超局所解析と古典解析, 長崎市交通会館(長崎県), 2014 年 12 月 6 日.

[2] 伊藤宏, 遠方で発散するポテンシャルを持つ Dirac 作用素の非相対論的極限について, 日本数学会総合分科会・一般講演, 東広島市・広島大学, 2014 年 9 月 25 日.

[3] 山田修宣, Uniform resolvent estimates of Dirac operators (joint work with H. Kalf and T. Okaji), 2014 年 夏の作用素論シンポジウム, 滋賀県・長浜市・セミナー・カルチャーセンター臨湖, 2014 年 9 月 7 日.

[4] 山田修宣, A remark on the uniform resolvent estimates of Dirac operators, 偏微分方程式セミナー, 京都大学理学部数学教室, 2014 年 5 月 20 日.

[5] 山田修宣, 極限吸収原理の落穂拾い, 作用素論セミナー, 京都市・京都大学数理解析研究所, 2014 年 1 月 31 日.

[6] 山田修宣, Spectral properties of

two-body Dirac operators - A review of Okaji's approach - Yamada, O. with Okaji, T. and Kalf, H., 第 20 回 超局所解析と古典解析, 京都市・京都大学理学研究科セミナーハウス, 2013 年 11 月 22 日.

[7] 伊藤宏, 遠方で発散するポテンシャルを持つ Dirac 作用素, 日本数学会総合分科会・一般講演, 松山市・愛媛大学, 2013 年 9 月 24 日.

[8] 山田修宣, 池部・斉藤の極限吸収法の応用に対する一注意, 2013 年夏の作用素論シンポジウム, 広島市・広島大学東千田キャンパス, 2013 年 9 月 7 日.

[9] 大鍛治隆司, Spectral problems about many-body Dirac operators mentioned by Dereziński, スペクトル散乱理論とその周辺(京都大学数理解析研究所研究集会), 2012 年 12 月 13 日.

[10] 山田修宣, Spectral problems of three-body Dirac operators on the Euclidean space, 第 19 回 超局所解析と古典解析, 北九州市・かんぼの宿, 2012 年 11 月 24 日.

[11] 山田修宣, Spectral problems about many-body Dirac operators mentioned by Dereziński (joint work with H. Kalf and T. Okaji), 2012 年夏の作用素論シンポジウム, 新潟大学・駅南キャンパス(新潟県), 2012 年 9 月 9 日.

[12] 山田修宣, The limiting absorption principle for Dirac operators in the non-extreme Kerr-Newmann metric, 日本数学会年会・一般講演, 東京都・東京理科大学, 2012 年 3 月 29 日.

[13] 山田修宣. The non-relativistic limit of Dirac operators with divergent potentials at infinity, Cardiff, Great Britain, 2012 年 3 月 5 日.

[14] 山田修宣, ディラック作用素の極限吸収原理について
第 18 回 超局所解析と古典解析, 高知県吾川郡・かんぼの宿, 2011 年 11 月 24 日

[15] 山田修宣, The limiting absorption method for Dirac operators in the non-extreme Kerr-Newman metric, 2011 年夏の作用素論シンポジウム, 熊本市・国際交流会館, 2011 年 9 月 3 日.

〔その他〕

ホームページ等

www.ritsumeai.ac.jp/se/~yamadaos/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

山田 修宣 (Yamada Osanobu)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 70066744

(2) 研究分担者

藤家 雪朗 (Fujiie Setsuro)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 00238536

渡部 拓也 (Watanabe Takuya)
立命館大学・理工学部・准教授
研究者番号: 80458009

(3) 連携研究者

伊藤 宏 (Ito Hiroshi)
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 90243005

大鍛治 隆司 (Okaji Takashi)
京都大学・理学研究科・准教授
研究者番号: 20160426