

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 8 日現在

機関番号：34504

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540228

研究課題名(和文) 曲面に関連した特異積分の研究

研究課題名(英文) Study of singular integrals associated to surfaces

研究代表者

藪田 公三 (YABUTA, KOZO)

関西学院大学・数理科学研究センター・客員研究員

研究者番号：30004435

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：核函数の半径方向の変化度を示す函数 $h(t)$ と曲面 $\{x= (|y|)\}$ あるいは $\{(y)=(y, (|y|))\}$ に関連した特異積分について、 L_p 有界性およびトリーベル・リゾルキン空間からトリーベル・リゾルキン空間への有界性について、いくつかのよい結果を得た。関連したベクトル値特異積分であるマルチンキエヴィッチ積分あるいは多重線形特異積分においても同様の結果を得た。それらを含め、14件の成果を得た。これらは特異積分の研究進展に寄与するものである。

研究成果の概要(英文)：For singular integrals with kernel associated to the surface of the form $\{x= (|y|)\}$ etc, we obtained several good estimates not only in L_p but also in Triebel-Lizorkin spaces. we published 14 results for singular integrals with rough kernel, vector space valued singular integrals and multilinear singular integrals. These contribute to the development of the study of singular integrals.

研究分野：数学

キーワード：調和解析 フーリエ解析 実解析 函数解析

1. 研究開始当初の背景

は n 次元ユークリッド空間 R^n から d 次元ユークリッド空間 R^d への写像で、 (y) は R^n の単位球面上の可積分関数で積分平均 0 、 $h(t)$ は 1 変数関数として、曲面 $\{(x,y) \in R^n \times R^d;$

$x=(y)\}$ に関連した特異積分 $T_{\{\Omega,\Phi,h\}} f(x)=p.v. \int_{R^n} \frac{h(|y|)\Omega(y)f(x-\Phi(y))}{|y|^{n-d}} dy, x \in R^d$ において $d=n, h=1, (y)=y$ の場合が、1950 年代に Calderon と Zygmund によって考察されたもので、理論の美しさだけではなく偏微分方程式論に有効に応用された。以来 Calderon-Zygmund の特異積分論として有名で、特異積分論は調和解析の重要な分野として発展してきた。

- (i) $d=n, \Phi(y)=\Psi(|y|)y/|y|,$
 - (ii) $d=n+1, \Phi(y)=(y,\psi(|y|)),$
 - (iii) $(y)=(P_1(y),P_2(y),\dots,P_d(y)),$
ただし、 $P_j(y)$: 多項式
- などの場合で、 h がある種の条件を満たしていれば、 $T_{\{\Omega,\Phi,h\}}$ は $T_{\{y,1\}}$ と同じような $L^p(R^n)$ 有界性などのよい性質持っていることについて、多くの研究がある。

しかし、Calderon, Zygmund 達の研究以来いくつかのよい研究 (代表して Christ, Duoandikoetxea, Rubio de Francia 達による論文) があるが、そのときに重要な役割をするのが Calderon-Zygmund によって開発された rotation method である。しかし、 $(y)=y$ でない時は、この方法が使えないので、本質的な工夫が必要となる。上記(i)の場合つまり $d=n, h=1, (y)=(|y|)y/|y|$ の時に、 (t) が幾つかの条件を満たすならばほぼ満足の行ける結果が得られている。

科学研究補助金基盤研究(C)(平成 20-22 年度)による「変数型特異積分の研究」においては、 (x,y) の形の場合を研究したのであるが、例えば、我々は(i)の場合に可成りよい結果を得た。また、(ii)と(iii)の合わさった

(ii-1) $(y)=(|y|)y/|y|, (y))$ で (t) が適当な条件を満たす場合には、Al-Qassem と Pan による成果がある。私と Li Wenjuan との共同研究で、彼らのアイデアと我々のものを組み合わせることにより、よりよいものが得られた。従って、(i), (ii) の場合の研究を更に進め得る状況にあった。また、ベクトル値特異積分である Marcinkiewicz 積分の研究においても十分な研究を積んでいた。

2. 研究の目的

そこで、(i), (ii) の場合の研究を更に進め、先ず可能性のある(ii-1) の場合の研究を本格的に行うのを第一の目的とする。そのことによ

り、 $(y)=(|y|)y/|y|, (y))$ で (t) が適当な条件を満たし、 $(y)=(P_1(y),P_2(y),\dots,P_d(y)), P_j(y)$: 多項式の場合にアタックしたいと考えている。また、それぞれの場合に対応して、偏微分方程式論に応用する際に重要な働きをする特異積分と函数掛け算作用素との交換子についても研究するつもりである。並行的に、ベクトル値特異積分である Marcinkiewicz 積分の研究も行うことも目的である。

3. 研究の方法

研究開始当初の背景で述べた(i), (ii), (iii) のそれぞれの場合に、文献調査を交えた試行考察による研究を進めつつ、研究分担者、連携研究者、研究協力者とのアイデアの交換・討論によって研究の進展をはかる。

(1) 平成 23 年度

上記研究開始当初の背景(i)の場合に、成功した方法、連携研究者の佐藤による結果などを再検討し、 $T_{\{y,1\}}$ が $L^p(R^n)$ 有界になるための条件の探索を行う。このため、此の分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論への応用(研究分担者北原和明氏担当)を含めて行う。その際、国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る。また、北京師範大の Ding 教授、Xue 准教授とは、関連したベクトル値特異積分である Marcinkiewicz 積分の研究で共同研究している。これに鑑み、目的の研究進展に彼らとのアイデアの交換・討論を行う。

(2) 平成 24 年度

初年度において上記(i)の研究が思ったように進展しなかった場合には、過去の文献の方法を再検討し、新たな視点から引き続き上記(i)の研究を続ける。と同時に、上記研究開始当初の背景で述べた(ii-1)の研究に取り掛かる。

上記(ii-1)の場合の最新の研究は Al-Qassem と Pan によるものがある。彼らの仕事や我々が既に得ている結果を参考に研究を本格的に行う。

このため、此の分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論への応用(研究分担者北原和明氏担当)を含めて行う。その際、国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る。また、北京師範大の Xue 准教授・Ding 教授とのアイデアの交換・討論も続けて行う。

(3) 平成 25 年度

24 年度において上記(ii-1)の研究が思ったように進展しなかった場合には、曲面に関連し特異積分を最初に取り扱った Stein と Wainger の論文を精査し、新たなアイデアを開発して、引き続き(ii-1)の研究を続ける。と同時に、

(ii-2) $(y)=(|y|)y/|y|, (y))$ で (t) が適当な条件を満たし、

$(y)=(P_1(y), P_2(y), \dots, P_d(y))$, ただし $P_j(y)$: 多項式

の場合の研究に取り掛かる.

このため, 此の分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論への応用(研究分担者北原和明氏担当)を含めて行う. その際, 国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る.

また, 北京師範大の Xue 准教授・Ding 教授とのアイデアの交換・討論も引き続き行う.

(4) 平成 26 年度

25 年度において上記(ii-2)の研究が思ったように進展しなかった場合には, 曲面に関連し特異積分を最初に取り扱った Stein と Wainger の論文のほか, 関連した過去の結果を更に調査し, 新たなアイデアを開発し引き続き上記(ii-2)の研究を続ける.

同時に, それまで3年間の研究の総括を行いつつ, より一般的な場合への足掛かりをつかむ研究を行う.

このため, 此の分野の文献調査を行いつつ種々の試行考察を関数近似論からのアイデアも得ながら(研究分担者北原和明氏担当)研究を行う. その際, 国内の調和解析分野の研究者とのアイデアの交換・討論により研究進展を図る. また, 北京師範大の Xue 准教授・Ding 教授とのアイデアの交換・討論を行う.

4. 研究成果

(1) 研究課題に直接関係した曲面に関連した特異積分における成果.

主な発表論文等の雑誌論文欄の , , , がこの面の成果である. は研究の目的での(ii-i)の場合に得た成果である. は(i)の場合の成果で, L^p 空間での有界性とどまらず, トリーベル・リゾルキン空間からトリーベル・リゾルキン空間への有界性も示すことのできたもので, は(ii)の場合に同様の結果を得た. は が更に改良できることを示した. 残念ながら, (iii)の場合の成果を得ることができなかったが, 逆に考えると, (i), (ii)の場合だけでも研究すべきことが沢山あったことを示しているともいえる. 研究当初考えていなかったトリーベル・リゾルキン空間での研究をもっともつすべきことを示唆された. また, で考えたアイデア・工夫は, 現在進行中の研究にも生きており有用な研究であったと考えている.

(2) ベクトル値特異積分における成果.

雑誌論文欄 , , , , がこれに相当する成果で, 曲面に関連しない通常の場合を扱ったものである. はマルチンキエヴィッチ積分が L^2 有界であるための必要十分条件を論じたもので, 既知の結果を十分に改良した. は分数巾マルチンキエヴィッチ積分を考察し, 既知の結果の本質的な改良版を作った. は(1)欄で述べたのベクトル値特異積分版である.

(3) 多重線形特異積分における成果.

雑誌論文欄 , , がこれに相当する. いずれも曲面には直接関係しない. は多重線形フーリエ乗算子に対し, 重み付き評価を Carleson 測度を媒介として論じた. この Carleson 測度の取り扱いに我々独自の工夫をすることで成果を得た.

(4) 研究課題に直接関係しない関連成果

雑誌論文欄 がこれに相当する. 特異積分に直接関係しないが, 特異積分を扱う上で重要な函数空間の一つであるモリー空間のある部分空間について, 過去色々な論文で使われてきた命題で, きちんとした証明が見逃されてきたものの証明を与えた. この面での知見の不安要素を解消するものである.

5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 16 件)

K. Yabuta, Remark on the Triebel-Lizorkin space boundedness of singular integrals associated to surfaces, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読あり, 28, 2015, 16 ページ, www.jams.or.jp/notice/scmjol

W. Li, Z. Si, K. Yabuta, Boundedness of singular integrals associated to surfaces of revolution on Triebel-Lizorkin spaces. *Forum Math.* 査読あり, 28, 2016, 57-75. DOI: 10.1515/forum-2014-0066

Q. Xue, K. Yabuta, J. Yan, Fractional type Marcinkiewicz integral operators on function spaces. *Forum Math.* 査読あり, 27, 2015, 3079-3109. DOI: 10.1515/forum-2013-0200

W. Li, Q. Xue, K. Yabuta, Weighted version of Carleson measure and multilinear Fourier multiplier. *Forum Math.* 査読あり, 27, 2015, 787-805.

Q. Xue, K. Yabuta, J. Yan, On the boundedness of fractional type Marcinkiewicz integral operators. *Math. Inequal. Appl.* 査読あり, 18, 2015, 519-527. DOI:10.7153/mia-18-38

K. Yabuta, Triebel-Lizorkin space boundedness of rough singular integrals associated to surfaces. *J. Inequal. Appl.* 査読あり, 2015, 2015:107, 26 ページ. DOI:10.1186/s13660-015-0630-7

X. Chen, Q. Xue, K. Yabuta, On multilinear Littlewood-Paley operators. *Nonlinear Anal.* 査読あり, 115, 2015, 25-40. DOI:10.1016/j.na.2014.12.001

T. Izumi, E. Sato, K. Yabuta, Remarks on a subspace of Morrey spaces. *Tokyo J. Math.* 査読あり, 37, 2014, 185-197. DOI:10.3836/tjm/1406552438

Y. Sawano, K. Yabuta, Fractional type Marcinkiewicz integral operators associated to surfaces. *J. Inequal. Appl.* 査読あり, 2014, 2014:232, 29 pp. DOI:10.1186/1029-242X-2014-232

S. Shi, Q. Xue, K. Yabuta, On the boundedness of multilinear Littlewood-Paley g^λ function. *J. Math. Pures Appl.* 査読あり, 101, 2014, 394-413. DOI:10.1016/j.matpur.2013.06.007

K. Yabuta, Remarks on L^2 boundedness of Littlewood-Paley operators. *Analysis (Berlin)* 査読あり, 33, 2013, 209-218. DOI:10.1524/anly.2013.1144

W. Li, K. Yabuta, Some remarks on Marcinkiewicz integrals along submanifolds. *Taiwanese J. Math.* 査読あり, 16, 2012, 1647-1679. <http://journal.taiwanmathsoc.org.tw>

W. Li, K. Yabuta, Rough singular integrals associated to submanifolds. *Taiwanese J. Math.* 査読あり, 16, 2012, 1557-1587. <http://journal.taiwanmathsoc.org.tw>

Y. Ding, Q. Xue, K. Yabuta, A remark to the L^2 boundedness of parametric Marcinkiewicz integral. *J. Math. Anal. Appl.* 査読あり, 387, 2012, 691-697. DOI:10.1016/j.jmaa.2011.09.020

[学会発表](計 3 件)

K. YABUTA, Triebel-Lizorkin space boundedness of Marcinkiewicz integrals associated to surfaces, The International Conference on Harmonic Analysis and Applications, 2015.5.22-5.25, Central China Normal University, Wuhan, P.R. China

K. YABUTA, Weighted estimates for fractional type Marcinkiewicz integral operators associated to surfaces, International Conference on Harmonic Analysis and Applications,

2014.6.10-6.14, Chern Institute of Mathematics, Tianjin, P.R. China
K. YABUTA, Fractional type Marcinkiewicz integral operators on function spaces, Harmonic Analysis and its Applications, 2012.10.12-10.16, Zhejiang Normal University, Jinhua, P.R. China

[図書](計 1 件)

W. Beckner, Y. Sawano and K. Yabuta(13 番目), (Editors:J. Li, X. Li and G. Lu), Higher Education Press, Beijing, P. R. China and International Press, Somerville, MA, U.S.A., Some Topics in Harmonic Analysis and Applications, 2015, 422 (331-366)

[産業財産権]

出願状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
出願年月日:
国内外の別:

取得状況(計 件)

名称:
発明者:
権利者:
種類:
番号:
取得年月日:
国内外の別:

[その他]
ホームページ等

6. 研究組織

(1) 研究代表者

藪田 公三 (YABUTA KOZO)
関西学院大学・数理科学研究センター・
客員研究員
研究者番号: 30004435

(2) 研究分担者

北原 和明 (KITAHARA KAZUAKI)
関西学院大学・理工学部・教授
研究者番号: 40195277

(3) 連携研究者

佐藤 秀一 (SATO SHUICHI)
金沢大学・人間社会研究域学校教育系・准
教授
研究者番号: 20162430