

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 8 月 18 日現在

機関番号：11301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540231

研究課題名(和文)単調および凸作用素関数と量子情報・数理物理への応用

研究課題名(英文) Monotone and convex operator functions with applications in quantum information and mathematical physics

研究代表者

HANSEN FRANK (Hansen, Frank)

東北大学・国際教育院・准教授

研究者番号：00600678

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円、(間接経費) 930,000円

研究成果の概要(和文)：申請者は、様々な作用素或いはトレース関数の凸性を証明した。申請者は、量子システムの残差量子エントロピー、単一または多重の複数の量子チャネルにおけるエントロピー・ゲインの凸性を発展させ証明した。この発見は、単調作用素関数論における昨今の進歩に基づくものである。申請者はまた、行列エントロピーのクラスを特徴づけた。これは、ランダム行列用に対する集結不等式を確立するための最近の方法である。申請者はまた、非可換のパスpekチブを特徴づけ、行列幾何学に応用があるいわゆる正規作用素写像の研究を創始した。

研究成果の概要(英文)：We proved convexity of various operator or trace functionals. This line of research uses methods, including a number of operator inequalities, which we developed. We discovered and proved a convexity property for the residual entropy of a quantum system, and for the entropy gain over one or multiple quantum channels. The discovery is based on recent advances in the theory of operator monotone functions and is reported in a paper published in the Journal of Statistical Physics and at the conference "Entropy in Quantum Mechanics: Recent advances", June 25-26 2013, Paris, France.

We also characterised the class of matrix entropies, which is a recent tool to establish concentration inequalities for random matrices.

We obtained new results in the theory of monotone and convex operator mappings, with applications in quantum physics. We also characterised the non-commutative perspectives and initiated a study of so-called regular mappings with applications in matrix geometry.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学 解析学基礎

キーワード：関数解析(合作用素論・表現論) quantum information

1. 研究開始当初の背景

数学及び物理における非可換性の役割をより深く理解する必要性があった。

非局所性つまりエンタングルメントは量子力学を特徴づける特性である。この現象は量子力学の数学的表現において、観測量を表す作用素あるいは行列の非可換性として反映される。それ故、非可換性の数学的研究は現代物理学において必須不可欠な役割を担っている。

2. 研究の目的

本研究は大域解析のカテゴリーに分類される。より正確に言えば、作用素環論、作用素不等式、凸性又は作用素写像の単調性、或いはエントロピー関数を含むトレース関数の分野に属する。これらの研究分野はそれぞれ独立した興味を有するが、量子情報論と量子統計力学手法においても豊かな応用をもつ。

3. 研究の方法

本研究は純粋に理論上のものであり、様々な数学的理論を活用する。これらのうちいくつかは、研究代表者によって発展がなされたものである。

代表者はこのように作用素単調関数、作用素凸関数、トレース関数、作用素不等式、および量子情報汎関数の理論に、幅広く引用される貢献をしてきた。

4. 研究成果

量子情報関数の研究: 項目1で発展させた一般理論を応用して、Temme, Kastoryanao, Ruskai, Wolf, Verstrate (J. Math. Phys. 51:122201) によって導入された量子 χ^2 ダイバージェンスの凸性を証明した。量子 χ^2 ダイバージェンスは量子統計に依存して多様であり、この結果はこれまで特別な場合でしか示されていなかった。Aalborgにおいて2012年8月に開催された国際数理物理会議でこの成果について招待講演を行った。

単調および凸作用素写像の理論: オクスフォード大学から学術参考書を出版する予定で10年来継続中の研究である。この研究過程で発見したLöwnerの定理の新しく簡易化された証明をプレプリントに著し、いくつかのコンファレンスとセミナーで講演した。

単調および凸作用素写像の理論: 量子物理に应用をもつ新しい結果が得られた。この研究は10年来継続中のものであり、オクスフォード大学から出版される学術参考書として現在編集中である。

量子情報関数の研究: Wigner-Yanase-Dysonの歪情報量と類似の歪情報量測度の新しい族を発見した。この発見は作用素単調関数の理論における最近の進展に基づいており、Journal of Statistical Physicsに出版予定の論文に発表される。また2012年8月6-11日のデンマーク、Aalborgでの国際数理物理会議で報告した。

代表者は、様々な作用素或いはトレース関数の凸性を証明した。この一連の研究は、代表者が発展させた多くの作用素不等式を含む方法による。

代表者は、量子システムの残差量子エントロピー、単一または多重の複数の量子チャンネルにおけるエントロピー・ゲインの凸性を発展させ証明した。この発見は、単調作用素関数論における昨今の進歩に基づくものであり、雑誌 Journal of Statistical Physics 及び学会“Entropy in Quantum Mechanics: Recent advances” (フランス、パリ、2013年6月25日~26日) で発表されたものである。

代表者は、Carlen-Liebによって以前に研究されたある種のトレース関数の凸性の新しい証明を与えた。この発展により、関連の結果を作用素凸関数の理論の枠組みで理解することができるようになった。新しい方法は解析関数の理論からいくつかの結果を利用している。これらのトレース関数の凸性は量子エントロピーの強劣加法性に関係している。

その過程で我々は、作用素の微分と商を含むいくつかの新しい凹トレース関数を見つけた。

より技術的な面では、我々はある逆フレシェ微分の凹性とある関連する2次形式の凸性との間の深い関係を見つけた。これらの仕事は、E. Liebが特別な場合で以前に行った仕事の延長にあり、ランダム行列理論における行列エントロピーと集結不等式の研究に役立つものである。

さらに、代表者はよく知られた単調作用素写像の差が依然としていくつかの単調性を保存することを示した。

代表者はまた、行列エントロピーのクラスを特徴づけた。これは、ランダム行列用に対する集結不等式を確立するための最新の結果である。

代表者は、単調及び凸作用素写像の理論

において新しい結果を与え、量子物理に
応用した。

代表者はまた、非可換のパーспекティブ
を特徴づけ、行列幾何学に応用がある
いわゆる正則作用素写像の研究を創始
した。

正則作用素写像の概念は、スペクトル関
数の概念の多変数の場合の理論への自
然な拡張である。驚くべきことは、この
設定での Jensen の作用素不等式とパー
スペクティブ写像などの概念が多変数
の場合に拡張され、しかも1変数のスペ
クトル関数のよく知られた性質と非常
に類似の性質が保存されることである。

この枠組みは多変数の幾何平均の研究
に役立つことが期待される。

代表者は、Ed Effros と共同で、上述の理
論を用いて、手始めの結果として、2つ
の作用素変数の幾何平均が2つの可換
な作用素の幾何平均の正則作用素写像
への唯一の拡張であることを示した。現
在発展中のこの理論が行列幾何の研究
で極めて有用であることが期待される。

代表者は、Jacob Gyntelberg と共
同で、決定理論における量子論理の概念
を導入した。これらの新しいモデルは、
観測される挙動を理性的認知プロセス
の結果として説明することを可能にする。
これは、D. Ellsberg の実験で露にな
った難問への解答を期待値汎関数の線
形性を放棄しないで与える。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計6件)

1. Edward Effros and Frank Hansen:
Non-commutative perspectives. *Annals of
Functional Analysis* 5(2), 74-79 (March
2014).
Peer reviewed.

2. Frank Hansen: Trace functions with
applications in quantum physics. *Journal
of Statistical Physics*: 154(3), 807-818
(February 2014).
Doi: 10.1007/s10955-013-0890-x.
Peer reviewed

3. Frank Hansen: WYD-like skew information
measures. *Journal of Statistical Physics*:
151(5), 974-979 (June 2013).
Doi:10.1007/s10955-013-0737-5.
Peer reviewed.

4. Frank Hansen: The fast track to Löwner's
theorem. *Linear Algebra and its
Applications* 438 (2013) 4557-457.
Peer reviewed.

5. Frank Hansen, Expected utility with
subjective events. *The Australian Journal
of Mathematical Analysis and Applications*
9(2), article 7, pp. 1-21 (2012).
Peer reviewed.

6. Frank Hansen, Convexity of quantum
chi-square-divergence. *Proceedings of the
National Academy of Sciences USA* 108, No.
25, 10078-10080 (2011).
Doi:10.1073/pnas.1106423108.
Peer reviewed.

[学会発表](計7件)

1. Frank Hansen (招待講演)
Convex trace functions with applications
in quantum physics.
第44回 Annual Iranian Mathematics
Conference.
2013年8月27日~30日
イラン、マシャード。

2. Frank Hansen (招待講演)
Convex trace functions with applications
in quantum physics.
学会 "Entropy in Quantum Mechanics: Recent
advances".
2013年6月25日、26日
フランス、パリ

3. Frank Hansen (招待講演)
Recent advances in the theory of operator
monotone functions with applications in
physics.
Workshop on Operator Theory and Operator
Algebras.
2012年11月23日~25日
大阪、日本

4. Frank Hansen (招待講演)
Convexity of quantum information
functionals.
12th International Congress of
Mathematical Physics.
2012年8月6日~11日
Aalborg, デンマーク

5. Frank Hansen (招待講演)
The fast track to Löwner's theorem.
Conference on Positive matrices and
operators: Recent developments and
advances.

2012年6月24日～28日
ダエグ、漢国

6. Frank Hansen (招待講演)

The fast track to Löwner's theorem.
Workshop on Operator Theory and Operator
Algebras.

2012年3月21日～22日
仙台、日本

7. Frank Hansen (招待講演)

The fast track to Löwner's theorem.
Conference on Anomalous Statistics,
Generalized Entropies, and Information
Geometry.

2012年3月6日～10日
奈良、日本

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他] (計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

ハンセン フランク (HANSEN, Frank)

東北大学・国際教育院・准教授

研究者番号：00600678