

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 26 年 6 月 2 日現在

機関番号：11601

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540232

研究課題名(和文)非コンパクトな変分構造に付随する放物型・楕円型方程式の研究

研究課題名(英文)A study on the elliptic and the parabolic equations associated with noncompact variational structures

研究代表者

石渡 通徳 (Ishiwata, Michinori)

福島大学・共生システム理工学類・准教授

研究者番号：30350458

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,400,000円、(間接経費) 1,020,000円

研究成果の概要(和文)：本研究では非コンパクトな変分構造に付随する放物型方程式の時間大域解の漸近挙動、楕円型方程式の解の多重性、及び関連する臨界型関数不等式とそれに付随する最小化型変分問題の最小化元の存在・非存在を扱った。

放物型方程式については、臨界ソボレフ指数を非線型項の増大度にもつ方程式の時間大域解の挙動について、エネルギー汎関数の値が量子化されることを、また楕円型方程式については、外部領域で定義された重み関数付きの方程式について、重み関数の空間無限遠での減衰が十分ゆるいときに多重解が存在することを明らかにした。関数不等式については、Trudinger-Moser 型不等式、Hardy 型不等式について論じた。

研究成果の概要(英文)：In this research, we are concerned with the asymptotic behavior of time-global solutions for semilinear parabolic equations whose Lyapunov functional are suffered from the lack of compactness, together with the elliptic problem with variational functional with lack of compactness. Also we studied the variational problem (minimizing problem) associated with the critical functional inequalities such as Sobolev, Hardy and the Trudinger-Moser type.

As for the parabolic problems, we treated the semilinear parabolic problem involving critical Sobolev exponent and showed the energy quantization phenomena for the time-global solutions. Also we studied the elliptic problem defined in the exterior domain with bounded complement with weight function decaying at the spatial infinity. We proved that if the decay of the weight function is sufficiently slow, then the equations have multiple positive solutions.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：非線型解析 変分法 楕円型方程式 放物型方程式 エネルギー汎関数 リャプノフ汎関数 非コンパクト性

1. 研究開始当初の背景

半線型放物型方程式・楕円型方程式は、多くの現象の数理モデルとして基礎的かつ典型的なものであるため、方程式に内蔵される数理の解析は理論面のみならず応用的側面からも重要である。特に系の安全な制御の観点からは、「解が時刻無限大の極限で定常状態に漸近する」以外の現象にどのようなものがありえるかを分類し、その背景にある数理を明らかにすることは重要であるが、これまでのこうした現象の研究は個々の方程式や個々の解に応じた ad hoc な解析がなされているだけで、統一的な数学的概念枠組みのなかで方程式横断的に議論されることはあまりなかったと言ってよい。特に臨界ソボレフ指数をもつ半線型放物型方程式や、非有界領域上で定義された半線型放物型方程式には上述した特異な挙動を行う解の存在が予想されるが、こうした解の挙動に関する詳細な研究は現在までほとんど存在しないと言ってよい。また、上記方程式の時間大域解の挙動の解析には、対応する臨界型関数不等式に関する知見が不可欠であるが、関数不等式について、方程式の解の挙動と絡めた観点からの研究もあまり行われてこなかった。

2. 研究の目的

本研究は半線型放物型方程式の特異解、半線型楕円型方程式の解の多重性、臨界型関数不等式に付随する変分問題の3つの対象を、それぞれの背後にあるエネルギー汎関数のコンパクト性の破れという観点から統一的に解析し、一見異なるそれぞれの対象の背後にどのような数理構造のカテゴリがあるかを明らかにしようとするものである。具体的には、臨界指数を持つ放物型方程式に見られる無限時間爆発解、及び非有界領域上で定義された半線型放物型方程式に存在が示唆される無限時間逃げ去り解について、コンパクト性の破れの観点からその存在、漸近プロファイルなどを明らかにするものである。また密接に関係する半線型楕円型方程式の解構造の解析、及び臨界型関数不等式、特に Trudinger-Moser 型不等式、log-Hardy 不等式に付随する変分問題の解析も行なった。

3. 研究の方法

研究の方法、特に研究に対する視点は以下の二点である。

(1)コンパクトではない軌道をもつ力学系の理論。無限時間爆発解、もしくは無限時間逃げ去り解は関数空間内で有界であるがコンパクトでない軌道をもつ。したがって力学系理論の観点からは、コンパクトでない力学系として捉えることができる。従来こうした観点からの力学系理論の解析もあまり行われてこなかった。

(2)共形不変性をもつ変分構造に付随する熱流の構造。研究対象となった方程式・不等式に付随するエネルギー構造は自然な共形構

造をもち、付随してコンパクト性の破れが起こる。

本研究では上記(1)(2)の視点を融合し、これまで個別的なテクニックにより解析されてきた放物型方程式の爆発解の挙動を扱った。

4. 研究成果

無限時間爆発解や無限時間逃げ去り解はコンパクトでない軌道を持ち収束先が存在しないため、漸近挙動の解析といっても通常のテクニックは役に立たない。本研究では無限時間爆発解については共形構造に基づくスケールリングとエネルギー構造の不変性、及び放物型方程式の正則性に関する事項をフルに使用し、必ずしも球対称性や正値性を仮定しない状況で、解軌道に沿ったエネルギー量子化現象が起こること、また無限時間逃げ去り解については実際にそのような挙動を起こす初期値が存在し、それらは初期値の閾値をなすことが示された。関数不等式に付随する変分問題については、Trudinger-Moser 型不等式については増大度を表すパラメータが十分小さいときには最大化元が存在せず、十分臨界に近いときには存在するという、普通期待される結果と逆の結果が得られた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計6件)

(1)On the sharp constant for the weighted Trudinger-Moser type inequality of the scaling invariant form, Michinori Ishiwata, Makoto Nakamura, Hidemitsu Wadade, 査読あり, Ann. I. H. Poincare, 31, Issue 2, 2014, 297-314.

(2)On the existence and nonexistence of maximizers associated with Trudinger-Moser type inequalities in unbounded domains, Michinori Ishiwata, 査読あり, Emerging topics on differential equations and their applications, Nankai series in pure, applied mathematics and theoretical physics 10, 2013, 41-53.

(3)Positive solutions to a semilinear parabolic equation associated with the critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, Takashi Suzuki, 査読あり, Nonlinear Differential Equations and Applications NoDEA, 20, Issue 4, 2013, 1553-1576.

(4)Multiple positive solutions of semilinear elliptic equations with weight function in exterior domains, Michinori Ishiwata, 査読あり, Differential and Integral Equations, 26, Numbers 1-2, 2013, 183-200.

(5)Heat equation with a singular potential on the boundary and the Kato inequality,

Kazuhiro Ishige, Michinori Ishiwata, 査読あり, Journal d'Analyse Mathematique, 118, Issue 1, 2012, 161-176.

(6)Global solutions for a semilinear heat equation in the exterior domain of a compact set, Kazuhiro Ishige, Michinori Ishiwata, 査読あり, Discrete and continuous dynamical systems, 32, Number 3, 2012, 847-866.

[学会発表](計 19 件)

(1)The scale-invariant log-Hardy inequalities and related variational problems, Michinori Ishiwata, 3rd Italian-Japanese workshop on geometric properties for parabolic and elliptic PDE's, 6 September, 2013, Tokyo Institute of Technology, Tokyo, Japan.

(2)On the scale-invariant critical Hardy's inequality and related variational problems, Michinori Ishiwata, EQUADIFF 13, 26, August, 2013, Faculty of Arts, Charles University, Prague, Czech Republic.

(3)On the global compactness type result for weighted energy functional involving Sobolev critical exponent and its applications, Michinori Ishiwata, 南大阪応用数学セミナー, 大阪市立大学, 大阪, 2013 年 4 月 27 日.

(4)Semilinear parabolic equation with critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, International Conference Quantization Blow-up and Concentration in Mathematical Physics View Point, 27, March, 2013, Sigma Hall, Osaka University, Osaka, Japan.

(5)Variational problems associated with Trudinger-Moser inequalities in unbounded domains, Michinori Ishiwata, Swiss-Japanese Seminar, 17, December, 2012, University of Zurich, Zurich, Swiss.

(6) Variational problems associated with Trudinger-Moser inequalities in unbounded domains, Michinori Ishiwata, 12, December 2012, University of Milan, Italy.

(7)Asymptotic behavior of time-global solutions for semilinear heat equation involving critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, 5th Polish-Japanese Days on Nonlinear Analysis in Interdisciplinary Sciences - Modellings, Theory and Simulations -, 8, November, 2012, Kansai seminar house, Kyoto, Japan.

(8)スカラー場方程式の基底解の退化性について: 基礎とその応用 (Part I, Part II), Michinori Ishiwata, 第 2 回室蘭非線形解析セミナー, 室蘭工業大学, 室蘭, 2012 年 10 月 19-20 日.

(9)Asymptotic behavior of Palais-Smale sequences in the critical problem and its application to semilinear heat equation, Michinori Ishiwata, 5th Euro-Japanese Workshop on Blow-up, Centre International de Rencontres Mathematiques, 10, September, 2012, Luminy, France.

(10)On the concentration and the leaking phenomena for solutions of reaction-diffusion equations, Michinori Ishiwata, 応用数学-WPI-AIMR Math Unit 共催セミナー, 東北大学, 仙台, 2012 年 7 月 12 日.

(11) On the asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, The 9th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, 5, July, 2012, Hilton Grand Cypress, Orlando, FL, USA.

(12)Variational problems associated with Trudinger-Moser inequalities in unbounded domains, Michinori Ishiwata, The 9th AIMS conference on Dynamical systems, Differential equations and Applications, 3, July, 2012, Hilton Grand Cypress, Orlando, FL, USA.

(13)Asymptotic behavior of solutions for semilinear parabolic equation with critical Sobolev exponent, Michinori Ishiwata, Regularity and Singularity for Geometric Partial Differential Equations and Conservation Laws, June 14, 2012, Research Institute of Mathematical Science, Kyoto university, Kyoto, Japan.

(14)Variational problems associated with Trudinger-Moser type inequalities in unbounded domains, Michinori Ishiwata, CONFERENCE ON Evolution Equations, Related Topics and Applications, 21, March, 2012, Waseda university, Tokyo, Japan.

(15)On the existence and nonexistence of maximizers associated with Trudinger-Moser type inequalities in unbounded domains, Michinori Ishiwata, Emerging Topics on Differential Equations and their Applications--Sino-Japan Conference of Young Mathematicians, Chern institute, Nankai University, December 6, 2011, Tianjin, People's Republic of China.

(16)Decay estimates for the Laplace equation with dynamical boundary condition and its application to harmonic extension inequality, Michinori Ishiwata, 北九州地区における偏微分方程式研究集会, 九州工業大学, 小倉, 2011 年 11 月 26 日.

(17)The existence and the nonexistence of maximizing functions for the variational problems associated with Trudinger-Moser

type inequalities in the whole domain,
Michinori Ishiwata, MSJ-SI 2011,
September 20, 2011, Kyusyu university,
Hakata, Japan.

(18)Decay estimates for a solution to the
Laplace equation with a dynamical boundary
condition and related topics, Michinori
Ishiwata, Second Italian-Japanese
Workshop on geometric properties for
parabolic and elliptic PDE's, June 22,
2011, Cortona, Italy.

(19)Decay estimates for a solution to the
Laplace equation with a dynamical boundary
condition and applications, Michinori
Ishiwata,第 525 回「応用解析」研究会,早
稲田大学,早稲田,2011 年 6 月 4 日.

6 . 研究組織

(1)研究代表者

石渡 通徳 (ISHIWATA MICHINORI)
福島大学・共生システム理工学類・准教授
研究者番号 : 30350458