

平成 26 年 5 月 18 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：23540233

研究課題名(和文) 離散群論に対する非可換解析的アプローチ

研究課題名(英文) Noncommutative Analytic Approach for Discrete Group Theory

研究代表者

小沢 登高(OZAWA, Narutaka)

京都大学・数理解析研究所・教授

研究者番号：60323466

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,900,000円、(間接経費) 1,170,000円

研究成果の概要(和文)：作用素環論は解析学を用いて非可換な現象を研究する分野である。本研究計画では作用素環論を代数学に応用するなどして、離散群論の関数解析的側面を研究した。またその応用として従順であるが核型でない作用素環の初めての例を構成した。作用素環論において現在もっとも重要な未解決問題は「Connesの埋め込み予想」であるが、それが量子情報理論において研究されてきた「Tsirelson予想」と同値であることを証明した。さらにそれら予想の非可換実代数幾何学的な側面を研究した。

研究成果の概要(英文)：Theory of operator algebras is a branch in Analysis which deals with noncommutative phenomena. In this project, Ozawa applied theory of operator algebras and studied the functional analytic aspects of theory of discrete groups. As an application, he constructed the first example of an amenable but not nuclear operator algebra. Connes's Embedding Conjecture is currently the most important conjecture in theory of operator algebras. Ozawa has proved that this conjecture is equivalent to Tsirelson's Conjecture, which has been being studied in Quantum Information Theory. He also studied the noncommutative real algebraic geometric aspects of these conjectures.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環 関数解析 離散群論

### 1. 研究開始当初の背景

私は作用素環と離散群の関わりを研究している。(離散)群とは、任意の対象の対称性を記述するための数学言語である。例えば、ある結晶が与えられたとき、その結晶構造を変えない変換(回転操作、鏡映操作、反転操作など)全体を考えたものが群である。人間には線形的な構造の方が理解しやすいので、群の各要素を適当な(線形)空間上の作用素とみなして取り扱うことにする。さらに、そうした作用素全体が生成する代数系を考え、適当な位相で完備化すれば作用素環と呼ばれる対象ができる。(考える位相の違いにより、 $C^*$ 環と von Neumann 環の二種類が存在する。)位相の存在により、群論のような代数的な問題に対しても解析的なテクニックを使えるところが作用素環論の特徴である。作用素環の研究はそもそも、John von Neumann が量子力学の数学的取り扱いを目指して始めたものであったが、現在では数理物理だけでなく、群論やエルゴード理論などに幅広い応用がある。私の研究は双方向的で、これらの分野への作用素環論の応用とその逆を同時に扱っている。

現在の作用素環論において最も重要な未解決問題は「Connes の埋め込み予想」である。この予想は任意の von Neumann 環が適当な意味で有限次元環で近似できるというものである。この予想を Connes が述べた時点(1970年代半ば)では von Neumann 環の技術的な問題に過ぎなかったが、その後、作用素環論におけるいくつかの見掛けの全く異なる重要予想と同値であることが判明している。さらに近年になってこの予想が量子情報理論や非可換実代数幾何学において研究されてきた別の予想らと関係していることが分かってきた。非可換実代数幾何学は最近研究され始めた分野であって、実群環などの非可換実代数における等式や不等式を扱う分野である。その Hilbert 空間上の表現論を通して作用素環論を利用できるところがこの分野の特徴のひとつである。

### 2. 研究の目的

関数解析(作用素環論)的手法を用いて離散群の構造を研究する。特に興味を持って研究を進めるのは、各種の群作用の摂動に対する剛性、及び離散群の Banach 空間への埋め込み問題などの離散幾何学的側面である。また、そうして得た結果を逆に Banach 環論や作用素環論の研究に応用する。

### 3. 研究の方法

個人で行う日常の研究はもちろん重要であるが、数学研究においては他の研究者と着想を交換することも極めて重要である。そのため、国内外の研究集會に積極的に参加し、研究成果の発表、参加者との研究連絡、最新の研究動向についての情報交換等を行う。また、研究集會以外にも、共同研究者としばらくの期間同じ場所に滞在し、落ち着いた環境

で共同研究を行う。その他、書籍や会議録は適宜購入する。

### 4. 研究成果

本研究計画の成果を手短に纏めると、積年の未解決問題の部分的な解決([1,8])や、今後の研究に繋がる新しい現象の発見([3,4,6,7])、興味深い例の構成([1,2])など当初の計画では予見されていなかった大きな研究成果が得られた。以下個別に説明する。  
・(粗い)距離空間の漸近次元に関して、有限次元ならばその距離空間は従順という Higson--Roe による良く知られた定理がある。本研究では Dranishnikov & Sapir の問題に答えて、より一般に漸近次元増大度が劣指数関数的でも同じ結論が成り立つことを示した[9]。この結果は、「Thompson 群が従順か否か?」という有名未解決問題とゆるく関係している。

・「任意の可縮な Banach 環は有限次元半単純なものに限るか?」という有名未解決問題に取り組み、適当な仮定のもとでそれが成り立つことを示した[8]。即ち、一様近似性を持つ Banach 空間の上に忠実な作用を持つような可縮な Banach 環は有限次元半単純に限る。一般の場合にはワイルドな反例が存在すると考えられている。

・(単位元を持つとは限らない)環  $R$  は  $R=R^2$  を満たすときベキ等であると言われる。単位元を持つ環はもちろんベキ等である。私は N. Monod (EPFL) 及び A. Thom (Leipzig) との共同研究[7]で、「有限生成ベキ等環  $R$  は常にイデアルとして単元生成か?」という問題に取り組み、適当な仮定のもとでそれが成り立つことを示した。特に、可換環(Kaplansky の定理)、有限環、半群環に対して成り立つことを確認した。一般の場合は正しくないと考えられている。この問題は群論における未解決問題である Wiegold 問題と密接に関係している。

・G. Godefroy (Paris 7) と共同で距離空間に付随した自由 Banach 空間の研究を行い、自由 Banach 空間が常に近似の性質を持つわけではないことを示した[6]。

・任意の跡零行列  $A$  は交換子  $BC-CB$  としてかけることは良く知られている。私は W. B. Johnson (Texas A&M U) と G. Schechtman (Weizmann) と共同で、この事実のノルム評価つきの構成法を研究し、非自明な評価を得た[5]。

・Connes の埋め込み予想は作用素環論における最重要の未解決問題であるが、近年になってこの予想が量子情報理論や非可換実代数幾何学において研究されてきた別の予想らと実は関係することが分かってきた。私は Connes の埋め込み予想が、2人の独立した観測者の間に起こりうる量子相関に対する2つの異なる定式化が実は一致するという量子情報理論における Tsirelson 予想と同値であることを示し、作用素環論や非可換実代数幾何学との関係を調べた[3,4]。

・ $C^*$ 環の分類問題に対する応用を期待して、von Neumann 環の束を研究し、よい条件の下それらを分類した[2]。

・従順な作用素環は常に核型であろうというそれ

なりに有名な予想があったが, 私は Y. Choi (Saskatchewan) と I. Farah (York, Canada) との共同研究でこの予想の反例を構成した [1]. 構成には, 離散群の非ユニタリ的な一様有界表現を利用した. 反例は非可分なもので, より重要な可分の場合は今後の課題として残されている.

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計9件) 全て査読あり

[1] Y. Choi, I. Farah, N. Ozawa; “A nonseparable amenable operator algebra which is not isomorphic to a  $C^*$ -algebra.” *Forum Math. Sigma*, 2 (2014), e2.

doi:10.1017/fms.2013.6

[2] N. Ozawa; “Dixmier approximation and symmetric amenability for  $C^*$ -algebras.” *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 20 (2013), 349--374.  
<http://journal.ms.u-tokyo.ac.jp/>

[3] N. Ozawa; “About the Connes Embedding Conjecture.” *Jpn. J. Math.*, 8 (2013), 147--183.

doi:10.1007/s11537-013-1280-5

[4] N. Ozawa; “Tsirelson's problem and asymptotically commuting unitary matrices.” *J. Math. Phys.*, 54 (2013), 032202 (8 pages).

doi:10.1063/1.4795391

[5] W. B. Johnson, N. Ozawa, G. Schechtman; “A quantitative version of the commutator theorem for zero trace matrices.” *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 110 (2013), 19251--19255.

doi:10.1073/pnas.1202411109

[6] G. Godefroy, N. Ozawa; “Free Banach spaces and the approximation properties.” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 142 (2014), 1681--1687.

doi:10.1090/S0002-9939-2014-11933-2

[7] N. Monod, N. Ozawa, A. Thom; “Is an irng singly generated as an ideal?” *Internat. J. Algebra Comput.*, 22 (2012), 1250036.

doi:10.1142/S0218196712500361

[8] N. Ozawa; “A remark on contractible Banach algebras.” *Kyushu J. Math.*, 67 (2013), 51--53.

doi:10.2206/kyushujm.67.51

[9] N. Ozawa; “Metric spaces with subexponential asymptotic dimension growth.” *Internat. J. Algebra Comput.*, 22 (2012), 1250011.

doi:10.1142/S0218196711006777

[学会発表](計15件)

発表者は全て N. Ozawa

[1] “Noncommutative real algebraic geometry of Kazhdan's property (T)” *Géométrie Topologie Dynamique*, Université Paris Sud, 2014/02/13.

[2] “Coarse geometry of discrete groups and applications” *Geometry of Moduli Space of Low Dimensional Manifolds*, 京都大学数理解析研究所, 2013/11/08.

[3] “An amenable operator algebra which is not a  $C^*$ -algebra” *Operator Algebras and Operator Theory Seminar*, Seoul National University (韓国), 2013/11/01.

[4] “Continuous bundles of tracial von Neumann algebras” *Von Neumann Algebras and Measurable Group Theory*, KU Leuven (ベルギー), 2013/07/02.

[5] “Analytic approximation properties for discrete groups” (6 hours) *School on Group  $C^*$ -algebras*, Sde Boker (イスラエル), 2013/03/17-21.

[6] “Fortifications of Kazhdan's property” (4 hours) *Rigidity School*, 東京大学, 2013/01/07-10.

[7] “Quantum correlations and Tsirelson's problem” *AmenAbility*, EPFL (スイス), 2012/12/18.

[8] “Connes's Embedding Problem and its equivalent” (6 hours) *Sofic groups and applications to operator algebras*, Copenhagen (デンマーク), 2012/11/05-09

[9] “Survey on the classification of von Neumann factors of type  $II_1$ ” (Plenary) *Australian Mathematical Society 56th Annual Meeting*, Ballarat (オーストラリア), 2012/09/26.

[10] “More on the fixed point property of semi-direct product groups” *Workshop in Analysis and Probability*, Texas A&M University (米国), 2012/07/30.

[11] “Introduction to Connes' embedding problem” (4 hours) *Workshop on Connes' Embedding Conjecture*, Neuchâtel (スイス), 2012/04/23-27.

[12] “Is an irng singly generated as an ideal?” *Geometric and Analytic Aspects of Group Theory*, Mittag-Leffler Institute (スウェーデン), 2012/02/02.

[13] “Quasi-homomorphism rigidity with noncommutative targets” *仙台シンポジウム*, 東北大学, 2011/08/19.

[14] “Survey on weak amenability for groups” *Finite Dimensional Approximations of Discrete Groups*, Oberwolfach (ドイツ), 2011/05/18.

[15] “Weak amenability for groups and its

applications”(6 hours) Von Neumann algebras and ergodic theory of group actions, IHP (フランス), 2011/05/02-11.

〔図書〕

なし

〔産業財産権〕

なし

〔その他〕

下記ウェブサイトにて自分の研究成果、研究紹介、講義録、参加した研究集会の報告等を公開している。

<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~narutaka/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小澤登高 (OZAWA, Narutaka)  
京都大学・数理解析研究所・教授  
研究者番号：60323466

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし