様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成　２６　年　　５　月　１５　日現在

機関番号：１５３０１

研究種目：基盤研究(C)

研究期間：2011～2013

課題番号：２３５４０２４３

研究課題名（和文） 対称空間上のシュレディンガー方程式の代数構造および幾何構造の研究

研究課題名（英文） Study of algebraic structure and geometric structure of Schroedinger equations on symmetric spaces

研究代表者

筧　知之（Kakehi, Tomoyuki）

岡山大学・自然科学研究科・教授

研究者番号：７０２３１２４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　3,900,000円、（間接経費）　1,170,000円

研究成果の概要（和文）：数論および表現論の視点から主にコンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の詳細な構造を研究した。我々の主結果の一つは次の通りである。ベクトルポテンシャルおよびコンパクト対称空間に関するある仮定の下で、磁場付きシュレディンガー方程式の基本解の特異台は、有理数時間において低次元部分集合となり、その集合は一般化されたガウス和を用いて与えられる。他方、無理数時間においては、基本解の特異台は対称空間全体と一致する。

研究成果の概要（英文）：We mainly studied the detailed structure of the fundamental solution to the Schroedinger equation on compact symmetric spaces from the point of view of number theory and representation theory. One of our main results is as follows. Under certain assumptions on the vector potential and on compact symmetric spaces, the singular support of the fundamental solution to the magnetic Schroedinger equation becomes a lower dimensional subset of the compact symmetric space, which is given in terms of generalized Gauss sums at a rational time. On the other hand, at an irrational time, the singular support of the fundamental solution coincides with the whole symmetric space.

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：シュレディンガー方程式　対称空間　基本解　磁場　ガウス和

１．研究開始当初の背景

本研究の研究代表者は対称空間上のラドン変換と微分方程式への応用について研究してきた。ラドン変換の重要な応用としては、波動方程式の基本解の構成とホイヘンスの原理の証明が挙げられる。奇数次元ユークリッド空間上の波動方程式の基本解の台は光円錐と一致する。特に、各時刻に対して基本解の台は低次元集合となる。この類似が偶数重複度を持つ奇数次元対称空間上の修正された波動方程式に対して成立する。この一般化されたホイヘンスの原理には、ラドン変換を用いた証明がある。そして、それは多重時間波動方程式系にまで一般化されている。申請者は対称空間上のラドン変換の研究と一般化されたホイヘンスの原理への応用を通して、微分方程式の基本解の台の幾何構造に興味を持ち、その研究過程で、対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の台が奇妙な性質を持つことを発見した。勿論、ホイヘンスの原理はシュレディンガー方程式に対して成立しない。にも関わらず、ある条件下では、シュレディンガー方程式の基本解の台は低次元集合となるのである。詳しくは次が成立する。M=U/K を偶数重複度条件を満たすコンパクト対称空間とし、M 上の自由粒子に対応するシュレディンガー方程式：

$i\partial_t\psi + \triangle\psi = 0,\ \psi(0, x) = \delta_o(x),\ t\in R,\ x\in M$

を考える。ここで、△は M 上の U 不変なラプラシアン、$\delta_o(x)$は M の原点に台を持つデルタ関数とする。この方程式の解、即ち、基本解を E(t,x)とする。すると、M の幾何学的な構造から決まる定数 c が存在し、次の[I][II]が成り立つ。

[I] t/c が有理数の時。E(t,・)の（M 上の超関数と見たときの）台は、M の低次元部分集合となる。しかも、この低次元集合は一般化されたガウス和を用いて具体的に記述される。

[II] t/c が無理数の時、E(t,・)の台および特異台は M 全体と一致する。

上記の結果は、自由粒子が有理数と無理数を識別するということを主張している。奇妙なことは、有理数時間の基本解の表示に代数的整数論で考察の対象となるガウス和が現れる、ということである。一般に、コンパクトリーマン多様体上のシュレディンガー方程式の基本解については、自由粒子に対応する場合ですら、詳しいことは判っていない。これは、粒子の捕捉条件が強い場合、基本解を大域的かつ明示的に書くことが困難であることに起因する。(K. Yajima, CMP, 1996 を参照。） にも拘らず、上記の結果によって、高い対称性を持つシュレディンガー方程式の場合、基本解はある種の幾何学的、代数的な構造を持つのではないか、と考えるに至った。

２．研究の目的

本研究では、（A）対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の幾何的および代数的構造の解明と、（B）対称空間上の幾何解析への応用、の双方について研究を行う。

(A) 対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の構造の研究について

本研究では、上記結果の続きとして、BC 型コンパクト対称空間上で、次に、それ以外のコンパクト対称空間上で、自由粒子に対応するシュレディンガー方程式の基本解を構成する。但し、基本解の台については、前述の結果と同様なことは期待できない。この場合は、基本解の特異台の代数構造、および、幾何構造を解明する。代数構造については、基本解のガウス和を用いた表示を目指す。通常のガウス和については、相互律(reciprocity formula)と呼ばれる数論的な等式が成立するが、基本解の表示に現れる一般化されたガウス和がどのような相互律を満たすのかをルート系との関連において調べる。幾何構造

については、有理数時間における特異台の集合の次元や（ホモロジー群など）位相的性質のワイル群とワイル領域を用いた記述を試みる。次の段階として、ポテンシャル（０階の項）、および、磁場（１階微分の項）が入った、一般のシュレディンガー方程式に対する基本解のなるべく具体的な構成を目指す。そして、こうした摂動項を加えることで基本解の特異台の構造が自由粒子の場合とどのように異なるのかを調べる。

（B） 幾何解析、スペクトル解析への応用について

（B1）シュレディンガー方程式の跡公式。

（B2）Zworski 予想。この２つの問題について研究する。（B1）について。跡公式は、通常、微分方程式の基本解を２通りのやり方で求め、跡を取ることで得られる。例えば、コンパクト多様体上の波動方程式から得られる跡公式は、Duistermaat-Guillemin の跡公式と呼ばれ、ラプラシアンの固有値と閉測地線の関係を与える。本研究では、コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式に対して、（A）で得られた基本解を用いて跡公式を導出する。これにより、ラプラシアンの固有値と対称空間の表現論的な構造および幾何的な構造を結びつける新しい等式が得られるのではないか、と期待される。

（B2）について。コンパクト対称空間とその双対である非コンパクト対称空間は、ルート系の構造は同じでも、幾何学的構造は全く異なる。勿論、ラプラシアンのスペクトルの構造も全く異なる。にも拘らず、両者にある対応関係が存在することが Zworski によって予想された。非コンパクト対称空間上のラプラシアンのレゾルベントを解析接続すると極が現れ、この極はレゾナンスと呼ばれる。Zworski 予想は、レゾナンスと対応する留数作用素が、コンパクト対称空間上のラプラシアンの固有値および固有関数で表せる、ということを主張している。（この予想は、階数１の場合には証明されている。本研究では、（A）で得られた基本解の構成法を、双対である非コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式に適用することで、２つの異なる空間上の異なる基本解を結びつけ、それによって、より一般の場合に、Zworski 予想の証明を目指す。

２．研究の方法

第一段階として、コンパクト対称空間上の自由粒子に対応するシュレディンガー方程式を研究の対象とし、基本解の構成および特異台の幾何構造と代数構造の研究を研究分担者等と共同で行う。BC 型の対称空間をまず扱い、ついで、一般の場合を扱う。

次の段階として、シュレディンガー方程式に対する跡公式の導出と Zworski 予想の研究を、第一段階の研究結果を用いて行う。どちらの場合も、まず、自由粒子の場合を考察する。そのため、必要に応じて、代表者や分担者、協力者と活発な研究連絡、研究交流を行う。第３段階として、ポテンシャル、および、磁場を持つシュレディンガー方程式に対して、自由粒子の場合と同様な手順で研究を行う。

３．研究成果

コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解の代数構造、及び、幾何構造について研究を行い、より詳しい構造の解明を行った。具体的には、

(1) ルート系が偶数重複度条件を満たすコンパクト対称空間上の自由粒子に対応する時間発展型シュレディンガー方程式の基本解が、(1a)有理数時間においては、ある低次元集合上に台を持つ、他方、(1b)無理数時間においては、基本解の台および特異台は対称空間全体と一致する、という事を証明し、更に、上記の低次元集合が、一般化されたガウス和で記述されることを明らかにした。この結果自体は、本研究課題採択前にある程度得られていたが、この結果をまとめた論文は平

成２３年度に発表されたため、ここに明記しておく。

（2）ある種のコンパクト対称空間上の磁場付きシュレディンガー方程式について、ベクトルポテンシャルが零エネルギー条件を満たすという仮定の下で、基本解が有理数時間ではある低次元集合上でのみ特異性を持ち、無理数時間では空間全体で特異性を持つ、ということを証明し、かつ、特異集合の構造を明らかにした。(3) シュレディンガー型方程式の L2 適切性と１階の表象の虚部が零エネルギー条件を満たす、ということが同値であることを、かなり広いクラスのコンパクト対称空間上で証明した。(4) 有理数時間における基本解を一般化されたガウス和を用いて詳細に表示し、かつ、一般化されたガウス和に関する相補公式を導くことで、未来の有理数時間における基本解と過去の有理数時間における基本解を結びつけることに成功した。その結果、未来の有理数時間においては粒子の位置を決定できるということを証明した。ユークリッド空間上の通常のシュレディンガー方程式で記述される粒子に関してはいかなる未来においても粒子の位置決定は不可能である、ということが判っており、本研究結果は既知の結果との著しい差異をなしている。また、これにより、対称空間上のシュレディンガー方程式の解で記述される粒子の振る舞いがかなり奇妙なものであることが明らかになった。尚、上記の相補公式が、研究目的欄で述べたある種の跡公式となっていることを注意しておく。これらの結果の一部については、幾つかの国際研究会で発表すると同時に、２本の論文を出版し、１本の論文が掲載予定となっている。そして、研究目的蘭で述べた Zworski 予想については、現在、部分的な結果を得ているが、まだ論文としてまとめられる段階には達していない。これに関しては、引き続き研究を続行したい。多様体上のシュレディンガー方程式の基本解については、国内外を通して今まで、詳細な構造を解明した結果は存在せず、本研究成果は、全く独創的な結果であるといえる。

また、平成２５年度より研究分担者として新たに加わった田村英男岡山大学名誉教授は、アハラノフ・ボーム効果の研究を通してデルタ型磁場を持つシュレディンガー方程式のレゾナンスの漸近的な構造解析を行った。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計６件）

① Alexandrova, Ivana and <u>Tamura, Hideo</u>
Resonances in scattering by two magnetic fields at large separation and a complex scaling method, Advances in Mathematics
査読有, 256 巻 2014, 398-448
DOI:http://dx.doi.org/10.1016/j.aim.2014.01.022

② <u>Tomoyuki Kakehi</u>
Magnetic Schroedinger equation on compact symmetric spaces and the geodesic Radon transform of one forms, Contemporary Mathematics, 査読有, 598 巻 2013, 129-138
DOI: http://dx.doi.org/10.1090/conm/598

③ <u>Tomoyuki Kakehi</u>
Support theorem for the fundamental solution to the Schroedinger equation on certain compact symmetric spaces, Advances in Mathematics, 査読有, 226 巻 2011, 2739-2763
DOI: 10.1016/j.aim.2010.10.003

〔学会発表〕（計９件）

① 筧　知之
Schroedinger equation on compact symmetric spaces and reciprocity for Gauss sums, Geometric and Singular Analysis（招待講演）,2014 年 03 月 24 日,
Potsdam University (Germany)

② 筧　知之
L2-wellposedness for Schroedinger type equations on compact symmetric spaces
The 20th Microlocal Analysis and Classical Analysis（招待講演）, 2013 年 11 月 22 日
京都大学理学研究科セミナーハウス

③ 筧　知之
On the support of the fundamental solution

to the Schroedinger equation on certain compact symmetric spaces, Functional Analysis and Global Analysis（招待講演）2012 年 11 月 19 日，東京理科大学理工学部

④ 筧　知之
Magnetic Schroedinger equation on compact symmetric spaces, Analysis, Geometry and Group Representations for Homogeneous Spaces, JSPS-NWO Seminar（招待講演），2013 年 8 月 28 日，名古屋大学理学部

⑤ 筧　知之
On the support of the fundamental solution to the Schroedinger equation on certain compact symmetric spaces, Functional Analysis and Global Analysis（招待講演）2012 年 11 月 22 日，東京理科大学理工学部

⑥ 筧　知之
Schroedinger equation on certain compact symmetric spaces, AMS Special Session on Radon Transforms and Geometric Analysis（招待講演），2012 年 1 月 7 日
Hynes Convention Center, Boston, USA

⑦ 筧　知之
Fundamental solution to the Schroedinger equation on compact symmetric spaces and Gauss sums, 微分方程式の総合的研究（招待講演），2011 年 12 月 18 日，東京大学

⑧ 筧　知之
コンパクト対称空間上のシュレディンガー方程式の基本解とガウス和，日本数学会秋季分科会関数解析分科会（招待講演）
2011 年 9 月 28 日，信州大学

⑨ 筧　知之
Fundamental solution to the Schoedinger equation on certain compact symmetric spaces, Nonlinear Dynamics in Partial Differential Equations,
2011 年 9 月 19 日，九州大学

〔図書〕（計　0　件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

○取得状況（計　0　件）

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕
ホームページ等

６．研究組織
(1)研究代表者
筧　知之　（KAKEHI TOMOYUKI）
岡山大学　自然科学研究科　教授
研究者番号：70231248

(2)研究分担者
田村　英男(TAMURA HIDEO)
岡山大学　自然科学研究科　名誉教授
研究者番号： 30022734

(3)連携研究者
山田　裕史（YAMADA HIROFUMI）
岡山大学　自然科学研究科　教授
研究者番号：40192794

(4)連携研究者
山田　裕史（YAMADA HIROFUMI）
岡山大学　自然科学研究科　教授
研究者番号：40192794