

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 1 日現在

機関番号：17102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2011～2015

課題番号：23540246

研究課題名(和文)作用素環の自己同型及び群作用の分類の研究

研究課題名(英文) Research of automorphism groups and group action classification of operator algebras

研究代表者

増田 俊彦 (Masuda, Toshihiko)

九州大学・数理(科)学研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60314978

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,700,000円

研究成果の概要(和文)：私は作用素環上の群作用の研究を主に行った。その結果としてまず離散従順群の単射的因子環への作用の統一的な証明を得た。つぎに戸松怜治氏との共同研究で、ロホリン的な性質をもつ一径数自己同型群の分類をおこなった。その応用の一つとして、単射的III₁型因子環の一意性を因子環の構造定理の観点から証明を与えることに成功した。また戸松怜治氏との共同研究で、コンパクト群の単射的因子環への作用の分類を行った。特にコンパクトリー群のような位相的によい性質をもつ群の作用の分類定理を得た。

研究成果の概要(英文)：I mainly study group actions on operator algebras. As a results, I first obtained a unified proof of classification theorem of discrete amenable group actions on injective factors. Next, I classified one-parameter automorphism groups with Rohlin property with Reiji Tomatsu. As one application, we present a proof of uniqueness of the injective factor of type III₁ from point of view of structure theorem of factors. I also study classification of compact group actions on injective factors with Reiji Tomatsu. In particular, we obtained classification theorem of actions of groups with nice topological property, e.g., compact Lie groups.

研究分野：作用素環

キーワード：作用素環 群作用 一径数自己同型群 離散従順群 コンパクト群

1. 研究開始当初の背景

(1) 作用素環論において自己同型群や、群作用の解析は重要な研究テーマの一つである。ひとつには作用素環の構造の研究と密接に関係しており、特にコンヌの仕事以来作用素環の分類と自己同型の分類が関係していることが明らかにされた。また作用素環を用いた数理物理の研究においても、時間発展が作用素環上の一径数自己同型で表されたり、代数的場の量子論においてもコンパクト群の作用が自然に生じたりし、構造解析以外でも群作用の研究は重要である。

(2) 分類の観点から最初に調べられたのは離散従順群の作用の分類で、上述したコンヌの仕事以来、様々な研究者によって分類定理が得られており、一応分類は完成している。しかし証明は因子環の型に強く依存したもので、統一的な証明は得られていなかった。

(3) 離散従順群について研究されているのはコンパクト群であるが、特に可換コンパクト群の場合は双対定理によって離散の場合に帰着されてジョーンズ、竹崎、河東らによって分類されている。非可換の場合はより難しく、私と戸松怜治氏によって特殊な作用についての分類定理が証明されていた。

(4) 一径数自己同型群の解析の重要性は昔から認識されていたが、分類という観点からすると離散群の場合と比べても大変困難であり、フォンノイマン環の場合については、河東による結果以外には目立った結果は得られていなかった。しかし C^* 環においては岸本によって様々な結果が得られていた。

2. 研究の目的

私の研究では、主に作用素環への群作用の分類を目的とした。

(1) まず離散従順群の作用の分類は一応完成はしていたが、証明は複雑で見通しのよいものではなかったため、これをより見やすい証明にすることを考えた。

(2) 一径数自己同型群の分類について、ロホリンの性質に基づいて作用を分類し、フォンノイマン環の構造をより深く理解することを目的とした。

(3) コンパクト群については、戸松怜治氏との分類結果をより一般のフォンノイマン環の場合に拡張することを目的とした。

3. 研究の方法

(1) 群作用の研究において基本的な道具は超積フォンノイマン環である。超積フォンノイマン環上に作用を持ち上げることによって、ロホリンの性質を定義できる。ロホリンの性質はコンヌの自己同型の分類で用いて以降、基本的な性質の一つとなっている。特

に岸本は C^* 環上の一径数自己同型群に対してロホリンの性質を定義して様々な成果を上げている。この性質をフォンノイマン環上の一径数自己同型群にも導入して(この方面での先駆的な仕事として川室によるものがある)分類を調べた。

(2) 分類においては、従来のモデル作用を用いた議論ではなく、Evans-岸本による群作用の分類の手法を用いる。この方法の利点はモデル作用の場合と比べ、平易な議論であること、様々な分類の議論に応用が利く、ということである。

(3) 部分因子環理論におけるセクター理論も自己準同型の解析に大変有用である。特に離散カツツ環の作用の研究において、有効に使われる。また部分因子環の自己同型の研究でも大変有用である。

4. 研究成果

(1) 群作用の中で一番よく研究されているのが、離散群の群作用である。特に単射的因子環への離散従順群の作用の分類はコンヌ以来様々な研究者が研究している。その結果群作用の分類は完成したのだが、その方法は因子環の型に強く依存したものであった。特に従来の方法では、III₁型因子環の場合は一径数自己同型群の分類理論が必要であり、この点が困難の原因でもあった。私は群作用の不変量を詳しく調べることによって、因子環の型によらない統一的な証明を与えることに成功した。群作用の分類の議論はコンヌ以来の伝統で、モデル作用の分離、という技法がこれまで使われてきたが、私の方法ではこの議論を避け、Evan-岸本による intertwining argument を用いている。その結果、統一的な議論が可能となり、また従来の証明と比べても簡明となっている。また不変量が分類においてどのような役割を果たすかもより明らかにされた。Evans-岸本の方法は以下説明するコンパクト群作用や一径数自己同型群の分類でも主要な議論として用いられている。

不変量を実現するようなモデル作用の構成も従来の竹崎らの方法より見通しのよい方法で行った。この方法ではコンヌ-竹崎 module の持ち上げの存在を用いれば、従来の方法で使われていた亜群を用いることなくフォンノイマン環の接合積のみで構成できる。なおこの方法をより一般化することによって、片山-竹崎による G 核(外部的作用)の一般的な分類定理を得ることもできる。モデル作用の構成についても同様に行う。片山-竹崎の分類定理及びモデルの構成では、ある種の分解群を経由する必要がある。この分解群は標準的に作られるものではないので、その点が不自然であったが、私の方法では、分解群を使うことなく自然に証明がなされる。モデルの構成についても同様であるが、

一点自由な G 核の構成だけが問題となる。これは林-山上の理論を使えばでてくるのだが、彼らはかなり一般的な状況でやっているので、 G 核の場合に制限したうえで彼らの構成をより見やすくすることによって自由な G 核の構成を行った。

(2) 離散群について扱いやすいのはコンパクト群である。これはコンパクト群の双対が離散であるので、離散群の技術が応用できるからである。戸松怜治氏との共同研究で、コンパクト群によい性質がある場合の単射的因子環への分類を行った。これから特にコンパクトリー群の作用の分類が得られる。分類においてはまず双対定理によって離散カッツ環の作用の分類に帰着させる。そのうえで、作用から生じるコホモロジー論的な不変量を定式化した。その過程で泉によって導入されたモジュラー自己準同型との関係を記述する必要がある。カッツ環の表現のカテゴリーがよい条件を満たす場合には、作用の分類は実質的に G 核を分類することに帰着される。これは上述した私の離散従順群の作用の分類の議論と類似の議論をたどることによって証明された。コホモロジー的不変量が自明な場合でも、荷重の流れの上の自己準同型の作用をみることによって作用が分類されることも示した。また作用を実現するようなモデル作用の構成も行った。

(3) 一径数自己同型群の研究も重要である。これについてはフォンノイマン環については河東の研究以来目立った進展はなかった。しかし C^* 環論では岸本による研究が進展していた。戸松怜治氏との共同研究で、岸本の口ホリン性の定義をフォンノイマン環にうまく適用することによって口ホリン的な性質をもつ自己同型群の分類を得た。その応用の一つとして単射的 III₁ 型因子環の一意性について、III 型因子環の構造理論の観点から新しい証明を与えることができた。(ただしコンヌとハーゲラップによるモジュラー自己同型に関する結果は用いる必要がある。) 離散従順群の場合と違って、しかるべきよい条件を持つ一径数自己同型群が口ホリン性を持つかどうか、ということは難しい問題で未だ未解決である。しかし具体的に構成された例ではほとんどの場合口ホリン性を確かめることができる。これと我々の分類定理を合わせることで、知られているほとんどの例を分類することができた。これは河東による分類結果を含んでいる。

(4) ジョーンズの部分因子環理論の設定でも群作用を研究することは重要であるが、私は特に Evans、河東、後藤、Xu、らによって研究されているオービフォルド構成法における障害類について、この障害が消える簡単な十分条件を与えた。その応用として、

D_{2n} 型因子環の存在定理が比較的容易に導かれる。従来の方法だとオクニヌのパラグループ理論や、共形場理論などの深い理論を用いる必要があり、けっして理解が簡単なものではなかったが、私の方法だとこのような深い予備知識なしで存在が証明される。証明では泉によるクンツ環上の自己準同型の構成のアイデアを用いる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

1. Toshihiko Masuda, Unified approach to classification of actions of discrete amenable groups on injective factors, J. Reine Angew. Math, vol.683, 1--47, (2013)

2. Toshihiko Masuda, Reiji Tomatsu, Rohlin flows on injective factors, Mem. Amer. Math. Soc に掲載決定

3. Toshihiko Masuda, Reiji Tomatsu Classification of actions of discrete Kac algebras on injective factors, Mem. Amer. Math. Soc に掲載決定

備考。以下の論文が 2016 年 5 月に掲載決定した。

4. Toshihiko Masuda, A simple sufficient condition for triviality of obstructions in the orbifold construction for subfactors, Math. Scand. に掲載決定.

[学会発表](計 8 件)

1. 増田俊彦、Rohlin flow on injective factors, 「作用素論作用素環論研究集会」琉球大学、2011 年 11 月 3 日

2. 増田俊彦、Rohlin flow on injective factors, Conference on von Neumann algebras and related topics, 京都数理解析研究所, 2012 年 1 月 12 日

3. 増田俊彦、Classification of group actions on von Neumann algebras, Workshop on operator algebras, 東京大学, 2013 年 5 月 11 日

4. 増田俊彦、フォンノイマン環上の口ホリン的な流れの分類について, 第 52 回実関数函数解析合同シンポジウム、青山学院大学、2013 年 9 月 4 日

5. 増田俊彦、Orbifold 構成法での障害が消

えるための十分条件、日本数学会函数解析分
科会、愛媛大学、2013年9月25日

研究者番号：70447366

6. 増田俊彦
Braided system上のgradingとLongo-Rehren
inclusion、京都大学数理解析研究所、20
14年1月29日

7. 増田俊彦、Connesの単射的III₁型因子
環の分類についての議論の紹介と補足(モジ
ュラー自己同型の近似的内部性について)
京都大学数理解析研究所、2015年2月3
日

8. 増田俊彦、離散従順群の単射的因子環へ
の外部的作用(G-kernel)の分類について、
日本数学会函数解析分科会、京都産業大学、
2015年9月15日

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕
出願状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
出願年月日：
国内外の別：

取得状況(計 0 件)

名称：
発明者：
権利者：
種類：
番号：
取得年月日：
国内外の別：

〔その他〕

ホームページ等
<http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~masuda/>

6. 研究組織

(1)研究代表者
増田俊彦(MASUDA Toshihiko)
九州大学数理学研究院、准教授
研究者番号：60314978

(2)研究分担者
()

研究者番号：

(3)連携研究者
戸松怜治(Tomatsu Reiji)
北海道大学理学研究科、准教授