様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：３２６１５
研究種目：基盤研究(C)（一般）
研究期間：2011～2015
課題番号：２３５４０２５０

研究課題名（和文）相転移力学の保存則・流体力学に現れる非線形双曲型偏微分方程式系の解の構造

研究課題名（英文）Structure of solutions to the systems of nonlinear hyperbolic partial differential equations arising in fluid dynamics and conservation laws for phase transition dynamics

研究代表者
山崎　満（YAMAZAKI, Mitsuru）

国際基督教大学・教養学部・教授

研究者番号：３０２４０７３２

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　3,800,000円

研究成果の概要（和文）：粘性と毛管現象を加味した2階と3階の空間偏微分を含む双曲型保存方程式の自己相似境界層解に対する小さな初期値に対するRiemann問題の解の存在を研究している．また，Boltzmann方程式のLp-安定性を研究している．また，化学腐食の放物型-楕円型の反応拡散系の空間多次元モデルの時間大域解の存在を研究している．

研究成果の概要（英文）：We study the existence of solutions to the Riemann problem with small data for self-similar boundary layers to the hyperbolic conservation equation with viscosity and capillarity. And we also study the time-global existence of solutions to the multi-dimensional parabolic-elliptic model for chemical aggression.

研究分野：非線形偏微分方程式系

キーワード：超局所解析　流体力学　双曲型保存則　特殊相対論　オイラー方程式　ボルツマン方程式　多重双曲型　エントロピー

１．研究開始当初の背景

P.L. Lions が一連の流体力学の方程式に共通した手法を示して Fields 賞を受賞し，C. Villani が Boltzmann 方程式の解の平衡解への収束により Fields 賞を受賞したように，Boltzmann 方程式の周辺の話題はホットで急務な題材であった．

２．研究の目的

工学・化学・生命科学に現れるモデルを含む非線形偏微分方程式系の中でも，連続体力学，とくに，

(A) 相転移(液体--気体)力学に現れる非線形多重双曲型保存則系の解の構造と反応拡散系への応用

(B) 相対論的 Euler 方程式の真空を含む entropy 解の存在と非相対論的極限と半空間上の解の構造

(C) Boltzmann 方程式の Lp 解の存在と安定性と解の漸近挙動

と分けて研究し，P.L. Lions の手法を手本として，後に(A)～(C)を統合して壮大な理論の構築を目指す．

３．研究の方法

本研究の対象は大きく３つに分かれるが，いずれも先行結果の数値実験や物理・生物現象から示唆される予想がある．初年度は，本研究費で購入するコンピューターで自らも数値実験を行ない，先行結果を参考にしながら，より精密な予想を立て，これまでの結果の発展・拡張を試みる．初年度は連携研究者・研究協力者と連携を特に密に取り，研究の対象を確認，絞り込み，次年度以降の目標を明確にする．

次年度以降は，その予想の理論的解明に挑戦し，得られた結果を研究集会等で発表し，他の研究者と議論し，より完成度の高いものとする．これらのことを連携研究者・研究協力者との研究交流を密にしながら行なう．

(1)[(A)について] 石油と水・水蒸気の相転移(液体-気体)を含む石油貯蔵場の D'Arcy 則に従う Buckley-Leverett モデル (“Mechanisms of fluid displacement in sands'”, S. Buckley and M. Leverett, Trans AIME (1942))の一般化は，“The classification of 2x2 systems of nonstrictly hyperbolic conservation laws, with application to oil recovery”, D.G. Schaeffer et al., Comm. Pure Appl. Math. (1987)により，臍 (へそ) 点をもつ 2x2 双曲型保存則系$\partial_t U+\partial_x f(U)=\partial_x[B(U)\partial_x U]$という非線形双曲型偏微分方程式である．すなわち，Jacobi 行列$f'(U)$は１点を除き強双曲的であり，ある 1 点(臍点という)で Jacobi 行列$f'(U)$の強双曲性が退化し数行列となる非線形多重双曲型偏微分方程式系である．石油回収の方法は，Water-Alternating-Gas 法と呼ばれている水と空気を交互に注入するものであるが，この保存則系の研究により，一定期間石油回収率を増加させることができる (``Theory of three-phase flow applied to water-alternating-gas enhanced oil recovery'' D. Marchesin et al.， Internat. Ser. Numer. Math. (2001)) ことが知られている．応用上の重要性に相反して，方程式系の導出の正当性，数値実験による非線形現象の予想しか知られていない．“ 臍点をもつ 2x2 双曲型保存則系$\partial_t U+\partial_x f(U)=0$ ”の Riemann 問題の解の構造について，一般の場合に，連携研究者・浅倉史興氏 (大阪電気通信大学工学部・教授)との共著論文において，臍点を通る 3 直線 Median，2 直線 Inflection locus，3 直線 Hysteresis locus にない点から出る Hugoniot 曲線を調べた．一般に１点から出る Hugoniot 曲線が局所的には 2 曲線であることは知られているが，この方程式系では，大域的には 2 曲線と離れた曲線からなることを突き止め，その曲線上で衝撃波速度と$f'(U)$の固有値の大小を追跡することで，大きな振幅をもつ古典衝撃波(Lax 衝撃波)・非古典衝撃波(過圧縮衝撃波，不足圧縮衝撃波)の存在に関する結果を得ることができた．また，これらの特別な直線上の点から出る Hugoniot 曲線については，具体的に計算可能なことから個別に調べることができた．もう１つの自己相似解である膨張波については，19 世紀の G. Darboux の“ 曲面一般論の臍点近くの曲線論 ”を読み替えることにより，すべて解明することができた．そこで，Glimm-Lax 理論を援用して，この 2 つの自己相似解を重ね合わせることで，一般の弱解の存在に関して深く解明していく．また，同氏との共著論文において，非有界な等高線に対して Morse の補題を拡張し，流束$f(U)$から導かれるポテンシャルの等高線に適用することで，解の安定性の条件の一つと考えられる粘性衝撃波解の存在・非存在を決定した．この方法に Majda-Pego の安定行列理論を適用することにより，より一般的のポテンシャルによる勾配流の大域的な接続問題活用を試みる．しかしながら，古典的衝撃波では，粘性衝撃波解の存在は他の解の安定性 (Lax の entropy 条件，Liu-Oleĭnik 条件)と同値であるが，非古典的衝撃波では，これらの安定性条件は互いに同値ではないので，この安

定性条件をみたす解を決定する．

(2)[(B)について] 等温流体に対する相対論的Euler方程式は，特殊相対論すなわち平坦なMinkowski時空間における圧縮性流体のダイナミクスを記述している．このモデルの数学的解析は，(“Approximate solutions for the Einstein equations for isentropic motions of plane-symmetric distributions of prefect fluids”, A. Taub, Phys. Rev. (1957))に遡る．この方程式系を Euler 座標で記述すると，質量密度ρが0(真空) に近づくに従い，速度場vが光速cに近づき，方程式系は高度に退化するとともに，一様強双曲性が崩れるという特異性を示す．そのため，こうした広いクラスの弱解を取り込む枠組みの中での数学解析は挑戦的な問題を提示する．しかしながら，例えば，星は compact な台をもつ質量密度をもつため，星の生成や消滅の解析には，この問題の解明は不可避なものと考えられる．もとの Euler 方程式の弱解の存在は，T. Nishida, Proc. Japan Acad. Sc. (1968)) に始まり，この結果は相対論的Euler方程式に自然に拡張された(J.A. Smoller and B. Temple, Comm. Math. Phys.(1993))．しかしながら，これらの先行結果では，特異性のない Lagrange 座標で方程式を解析するため，真空を含む質量密度を扱うことはできなかった．そこで,本研究では，あえて，特異性を持つEuler座標での方程式系を解析することで，真空を含む解を扱い，新たな研究分野の開拓を目指す．非線形保存則系の研究では“小さな解”しか扱えないことが多いが，本研究では“大きな解”および衝撃波解をも含む枠組みで解析する．先行結果である P.G. LeFloch and V. Shelukhin,“Symmetries and global solvability of the isothermal gas dynamics equations”, Arch. Rational Mech. Anal.(2005)の計算ミスを修正しながら，方程式系を Euler 座標で扱い，Riemann 関数により基本解を構成する．Euler 方程式の場合は，Riemann関数はBessel関数を用いて表現することができたが，相対論的Euler方程式の場合は，Riemann 関数の具体的な表現は期待できず，そのため特異性を示す境界へのRiemann 関数の挙動を調べる．そして，補償コンパクト性理論という別のアプローチを試みる．その際，有界変動関数と測度のテンソル積が現れるが， G. Dal Maso, P.G. LeFloch and F. Murat,“Definition and weak stability of nonconservative product”, J. Math. Pures Appl. (1995)に従い，この困難を克服する．こうして，研究協力者・P.G. LeFloch 氏(director of research at CNRS & UPMC)との共著論文により，相対論的 Euler方程式に対して，真空を含む“大きな解”および衝撃波解を含む弱解の存在が得られているが，光速cが無限大に近づく時の解の一様評価を得ることにより，この弱解が非相対論的Euler方程式の弱解に近づくかという問題「非相対論的極限」を解明したい．また，半空間での特異摂動極限に関する俣野博氏 (東京大学・数理科学研究科・教授), P.G. LeFloch 氏との共著論文 “Self-similar boundary layers with viscosity and capillarity”(編集中)と融合させて，半空間上の解の構造を調べる.さらに，この解析は宇宙創成の解明の一端を担っており，研究協力者・P.G. LeFloch 氏は天文学者 E. Gourgoulhon 氏 (パリ天文台 & CNRS・Director of research) らとも一般相対論からアプローチし，Lorentz 多様体上で解析しており，近い将来，これらの研究を融合し，例えば，有界曲率，Lorentz 多様体の最良正則性，時空間における衝突重力波，自己重力媒質場の崩壊，時空間における非線形双曲型方程式の離散化，媒質モデルとブラックホールの一意性定理を確立を試みた．

(3) [(C)について] 希薄気体の分子分布を記述する Boltzmann 方程式$\partial_t f + \xi \cdot \nabla_x f = Q(f,f)$ の解の安定性を解明したい．これまでの先行結果は，比較的扱いの容易なL^2空間の枠組みでなされいる．しかしながら，物理学的に考えると，質量分布の総質量を捉えるL^1空間が最も自然であると考えられる．本研究では，まずL^p空間での枠組みで解の安定性を考察する．Boltzmann 方程式に対すL^p空間での解の構造の研究はこれまでになく，研究協力者・S.-Y. Ha 氏(ソウル国立大学数理科学科・教授)との共著論文において，衝突ポテンシャルから導かれる非線形汎函数アプローチという全く新しい手法を用いている．それは，angular cut-off という自然な仮定のもと,ある時刻以降に起こりうる全ての衝突を計る一般化$(p,1)$-type 衝突ポテンシャル$\mathcal{D}^{p,1}\big(f(t)\big)$を，対応する生成率$\Lambda^{p,1}\big(f(t)\big)$ で評価する $\Big(\mathcal{D}^{1,1}\big(f(t)\big)\Big)' \leq -\Lambda^{1,1}\big(f(t)\big)$を基本の評価式とし，類似する様々な評価式を組み合わせて,$\cap_{p=1}^{M} L^p\big(R_x^3 \times R_\xi^3\big)$のノルムと同値で時間とともに減衰する非線形汎函数を構成することで解の安定性を得ているが，この解析をさらに精密なものとし，解の$L^1(R_x^3 \times R_\xi^3)$-安定性を解明したい．また，より取り扱いやすい Boltzmann 方程式の速度離散モデルに対して，研究協力者・S.-Y. Ha 氏との共著論文にあるように，大域的 Maxwellian $\mathcal{M}$(平衡解) 近くの解$F = \mathcal{M} + \Lambda_{\mathcal{M}}^{1/2} f$を考え，非線形作用素$Q(F)$を摂動$f$に対する線形作用素$\mathcal{L}(f)$と非線形作用

素$\Gamma(f)$の和として表わす．ここで，“Boltzmann equation: micro-macro decompositions and positivity of shoch profiles”T.-P. Liu and S.-H. Yu, Comm. Math. Phys (2004)
に用いられたmicro-macro分解$f = P_0 f + P_1 f$を用いて，macro 的なものが線形作用素$\mathcal{L}$に影響を与えず$\mathcal{L}(P_0 f) = 0$，micro 的なものに対して線形作用素$\mathcal{L}$は消散的である$\langle \mathcal{L}(P_1 f), P_1 f \rangle \leq -C_1 |P_1 f|^2$を用いて，大域的Maxwellian近くの解の一様$H^s \cap L^p(R_x^d)$-安定性$(p \in [1,2], d > 2p/(2-p))$および真空近くの解の時間局所的$L^p(R_x^d)$-安定性$(p \in [1,\infty])$が得られた．そこで，この結果のアイデアをBoltzmann方程式にも反映さていく．また，真空近くの解に定義されている散乱作用素の定義域を，Maxwellian近くの解まで拡張し，bi-Lipschitz 連続性が保たれているか調べる．さらに，この解の散乱挙動を調べ，時間が無限大のとき，解はL^pの意味で自由分子運動に漸近することを示すことに成功した．そこで，速度離散モデルでは解析されている(“Existence globale à données de Cauchy petites pour les modèles discrets de l'équation de Boltzmann”, J.-M. Bony, Comm. Partial Diff. Eqns (1991))ように，散乱作用素を定義し，散乱問題の議論を展開したい．

(4)(B)と(C)を合わせて，新しい研究テーマ「相対論に従う Boltzmann 方程式の解の存在・安定性」を先駆けて研究する．ここで得られた成果を，(A)と結び合わせて，楕円領域をもつ非線形多重双曲型保存則系で記述される石油貯蔵場における3相の標準モデルのはじめての数学解析を行ないたい．また，連携研究者・研究協力者との研究交流をさらに深め，工学・生命科学・環境学に現れる様々なモデルにこれまでの成果を応用する．特に，数値実験の結果の理論的な裏付けとなる研究をするとともに，数値実験では予想されないような現象を理論的な側面から提起する．このような理論・実践の相互の連携を密にして総合的に現象を解明する．

４．研究成果

(1) 相対論的オイラー方程式について，P.G. LeFloch 氏と共同研究している．非相対論的極限に関する結果を得た．これらの結果を論文１編(投稿中)に纏めることができた．

(2) ボルツマン方程式の速度離散モデルについて，S.Y. Ha 氏と共同研究している．解の安定性について一般的な枠組みでの結果を得て，湯川方程式への応用を模索中である．

(3) 粘性と毛管現象を加味した双曲型保存方程式の境界層解について，P.G. LeFloch 氏と保野博氏と共同研究している．放物型方程式の世界的指導者である保野博氏が新たに共同研究者として加わることとなり，多角的な分析が加えられつつあり，研究に新たな独創性を生み出しつつある．この方程式の小さな初期値に対するRiemann問題の解の存在を示し，論文１編に纏めることができた．その後．条件を弱め，結果を拡張できる可能性が出て来たので，一旦，論文の投稿を止め，論文の加筆修正を試みている．

(3) 反応拡散系のひとつである石灰岩の亜硫酸化学腐食の放物型-楕円型モデルの解の構造を特異摂動極限を用いて明らかにする．これまでの院生との特異摂動極限の手法 (N. Fujino and M. Yamazaki, “Burgers' type equation with vanishing higher order”, Comm. Pure Appl. Anal. (IF 0.857) (2007))を役立てる． 空間 1 次元のモデルの解の大域的存在は既知 (R. Natalini et al., Transp. Porous Media
(2007))であるので，その結果を空間多次元に拡張し，2 階の特異摂動極限により，解の存在とL^2評価を考察し，化学腐食に対する放物型-楕円型の反応拡散系の空間多次元モデルの時間大域解の存在について，D. Hilhorst 氏(director of research, パリ南大学)との共同研究を開始した．Hilhorst 氏が 2015 年 1 月に来日したときから，論文を書き始め，ほぼ完成した共著論文“Multi-dimensional parabolic-elliptic model for chemical aggression”(投稿中)を纏めた．これを，申請者がこれまで双曲型保存則系で研究を培ってきた高階の特異摂動極限に拡張し，より広いクラスの解を突き止め，反応拡散系の解析に新たな手法を産み出す．

５．主な発表論文等

（研究代表者，研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　1件）

① 山崎満，“微分方程式”，特集／初学者を悩ます数理の概念，数理科学，サイエンス社，NO. 575, May, 2011, 35--40.

６．研究組織

(1)研究代表者

山﨑　満（YAMAZAKI, Mitsuru）
国際基督教大学・教養学部・教授
研究者番号：３０２４０７３２

(2)研究分担者

(3)連携研究者

磯崎　洋（ISOZAKI, Hiroshi）
筑波大学・数理物質科学研究科・教授
研究者番号：９０１１１９１３

浅倉　史興（ASAKURA, Fumioki）
大阪電気通信大学・工学部・教授
研究者番号：２０１４０２３８